Universidad Nacional de La Plata

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de La Plata

Microeconomía II

Decisiones Bajo Incertidumbre

Camilo Rubbini

Trabajo Docente No. 10
Julio 2005

Caracterización del problema

Hasta el momento hemos estudiado las elecciones óptimas de consumo individual en contextos en los cuales el consumidor conocía perfectamente qué obtendría de sus elecciones. Esta teoría de elección bajo certidumbre es útil en muchas circunstancias.

Sin embargo, muchas otras situaciones no se ajustan a esta descripción del mundo. En general, cuando decidimos, existe incertidumbre sobre cuál será la consecuencia o resultado final de nuestra elección. El estudio de la elección del consumidor, en este contexto de incertidumbre, es el objetivo de la nota.

Considere, por ejemplo, un individuo que debe decidir si sale de paseo con un abrigo o sin él. La naturaleza, a su vez, "elige" si refrescará o no. En este caso, el resultado que el individuo obtiene de su decisión depende de la elección que hace la naturaleza. Todos los resultados posibles se presentan en la siguiente tabla:

Individuo vs. Naturaleza	frío	no frío
abrigo	c_{af}	c_{anf}
no abrigo	c_{naf}	c_{nanf}

En el problema que se describe, el conjunto de acciones disponibles para el individuo es $A = (abrigo, no\ abrigo)$, el conjunto de estados de la naturaleza posibles es $S = (frío, no\ \ frío)$, y los resultados de su elección (c_{as}) asociados con cada acción en cada estado de la naturaleza, son los elementos del conjunto $C = (abrigo\text{-}frío, abrigo\text{-}no\ frío, no\ abrigo\text{-}frío, no\ abrigo\text{-}no\ frío)$

Para elaborar una teoría de la elección en un contexto como el del ejemplo, el individuo debe ser capaz de establecer un ranking sobre los resultados c_{as}, y de desarrollar una creencia sobre cómo "jugará" la naturaleza. De esta forma, el individuo en un problema de elección bajo incertidumbre, debe poder especificar los siguientes elementos:

1. Un conjunto de acciones disponibles $A = \{1, ..., a, ..., A\}$;

2. un conjunto de estados naturales $S = \{1, ..., s, ..., S\}$;

3. una función de resultados $C(a, s)$ que muestre todos los resultados surgidos de combinar las acciones disponibles con los diferentes estados de la naturaleza;

4. una función de preferencias definida sobre los resultados $v(c_{as})$ que refleje su valoración de los mismos;

5. una distribución de probabilidades $\Pi(s)$ que represente sus creencias acerca de la ocurrencia de los distintos estados de la naturaleza s.

Analizaremos más adelante cómo se pueden relacionar dichos elementos de foma que el individuo pueda, partiendo de preferencias definidas sobre resultados, ordenar sus preferencias sobre las acciones disponibles.

Para concluir con la caracterización del problema, es conveniente hacer algunas aclaraciones. En primer lugar, en cuanto al conjunto de acciones del individuo, sólo se consideraran acciones *terminales*, en las que el mismo está restringido a hacer el mejor uso de la información disponible. Las acciones *informacionales*, en las que decide sobre si mejorar (y cómo) sus creencias antes de tomar una acción terminal, no serán consideradas. En segundo lugar, se supondrá que el individuo puede representar sus creencias sobre la probabilidad de que la naturaleza escoja tal o cual estado, a través de una distribución de probabilidad subjetiva.[1] Para estados de la naturaleza discretos, se asume que el individuo puede asignar a cada estado s, un grado de creencia en la forma de un ponderador numérico π_s, donde $0 \leq \pi_s \leq 1$ y $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$. [2] Por último, en lo que respecta a los resultados o consecuencias, cada uno de ellos surge de la combinación de una acción, tomada por el individuo, y un estado, elegido por la naturaleza. En la tabla, la consecuencia c_{naf} resulta de salir sin abrigo cuando la naturaleza determina el estado frío. En principio, el resultado puede ser descripto en términos de pasar frío, no disfrutar el paseo, enfermarse, etc. Sin embargo, nos interesarán principalmente consecuencias describibles en términos de canastas alternativas de consumo. Muchas veces los resultados tomarán la forma aún más sencilla de pagos monetarios. Las consecuencias pueden ser cantidades ciertas o cantidades probabilísticas. En este último caso podría caracterizarse la consecuencia c_{naf} como "enfermarse con probabilidad 0,8."

[1] En la terminología de Knight (1921), se distingue entre riesgo e incertidumbre. El primer término se reserva para designar aquellos contextos en los cuales el individuo puede calcular las probabilidades sobre bases objetivas, mientras que el segundo se utiliza cuando un cálculo objetivo de las mismas no es posible. No haremos uso aquí de tal distinción.

[2] Para el caso continuo, las probabilidades subjetivas del individuo se representan por una función de densidad $\pi(s)$ tal que: $\int_0^S \pi(s) = 1$

La Regla de la Utilidad Esperada

Preferencias sobre resultados y preferencias sobre acciones

La utilidad del individuo se relaciona directamente con los resultados y sólo indirectamente con las acciones. Esta es una distinción crucial. Mientras que $v(c)$ es una función que representa preferencias definidas sobre los resultados o consecuencias c, $U(a)$ representa preferencias sobre acciones a. La *Regla de la Utilidad Esperada* permite construir, bajo ciertas condiciones, un orden de preferencia sobre las acciones. En estas "condiciones" juega un papel fundamental el índice de preferencias sobre resultados $v(c)$, de forma que resulta conveniente analizar sus características.

Función de utlilidad de Bernoulli

En la literatura reciente [3] se ha adoptado el término de *función de utilidad de Bernoulli* para designar a la función $v(c)$ en tributo una prominente familia de matemáticos suizos.[4]

En los problemas de elección bajo certidumbre, la teoría económica tradicional trata a la utilidad como un concepto *ordinal*. Se postula que el individuo puede afirmar, por ejemplo, que prefiere la canasta x a la x^1, pero *no* se le exige que cuantifique cuánto más prefiere x a x^1. Así, si una función u representa preferencias, cualquier transformación monótona de u, que llamaremos $\hat{u}$, donde:

$$\hat{u} = F(u) \; con \; F'(u) > 0$$

representa las mismas preferencias.

En el contexto de la elección bajo incertidumbre, la Regla de la Utilidad Esperada requiere que la función de Bernoulli asigne utilidades *cardinales* a los resultados. Así, en la comparación de dos resultados c_1 y c_2, se requiere que el individuo pueda decir no sólo que prefiere c_1 a c_2, sino también *cuánto más* prefiere c_1 a c_2. A diferencia del caso de certidumbre, si $v(c)$, es una función que representa preferencias sobre resultados, sólo transformaciones monótonas lineales, también llamadas transformaciones *afines,* representan las mismas preferencias sobre acciones. Entonces, si $v(c)$ es una

[3] Véase A. Mas-Collell, M. D. Whinston y J. R. Green, 1995.

[4] Daniel Bernoulli, en un documento escrito alrededor del año 1730, introdujo una función logarítmica para calcular la utilidad del dinero.

representación válida, sólo $\hat{v}$ dada por:

$$\hat{v} = \alpha + \beta v(c)$$

donde α es cualquier constante, y β es cualquier constante positiva; representará las mismas preferencias. Muchas veces se dice que una propiedad es "cardinal" cuando sólo es invariante a transformaciones afines.

Función de Utilidad Esperada

Elegir una acción es elegir una fila en la matriz de resultados de la tabla. Llamaremos a estas filas *loterías.* Las loterías, son simplemente resultados inciertos. Cuando elegimos una lotería, estamos eligiendo un conjunto de resultados o consecuencias posibles, a cada uno de los cuales asociamos una probabilidad de ocurrencia. Una notación conveniente para la lotería que se asocia a una acción a, con resultados inciertos $c_{as} = (c_{a1}, ..., c_{as}, ..., c_{aS})$ y, que ocurren con probabilidades $\pi = (\pi_1, ..., \pi_s, ..., \pi_S)$ es:

$$l \equiv (c_{a1}, ..., c_{as}, ..., c_{aS}; \pi_1, ..., \pi_s, ..., \pi_S)$$

Para relacionar las preferencias sobre consecuencias o resultados, representadas por $v(c)$, con las preferencias sobre acciones o loterías, representadas por $U(l)$ vamos a hacer uso de la *Regla de la Utilidad Esperada* (RUE) de J. Von Neumann y O. Morgenstern (1944), según la cual:

$$U(l) \equiv \ \pi_1 v(c_{a1}) + ... + \pi_S v(c_{aS}) \equiv \sum_{s=1}^{S} \pi_s v(c_{as}) \tag{1}$$

De (1), surge que la utilidad de la lotería l, $U(l)$, puede calcularse como la esperanza matemática de las utilidades sobre los resultados $v(c_{as})$ asociados a l. La expresión es aditiva en los estados de la naturaleza, por lo que el resultado c_{as} realizado en cualquier estado s, no afecta de ningún modo el orden de preferencias sobre resultados en cualquier otro estado j con $j \neq s$. Así mismo, (1) es lineal en probabilidades, característica crucial para la teoría de decisión bajo incertidumbre. Como se ha dicho, la RUE es válida sólo si $v(c)$ asigna utlilidades cardinales a los resultados.

En suma, podemos presentar la siguiente proposición, que no vamos a demostrar, y que nos habilita a relacionar preferencias sobre resultados con preferencias sobre acciones o loterías[5]:

[5] Para una discusión intuitiva de la proposición 1 puede consultarse J. Hirshleifer y J. G. Riley (1992)

Proposición: Dados ciertos postulados de elección racional, existe una forma de asignar utilidades cardinales a los resultados, v(c), tal que la Regla de la Utilidad Esperada determina el ranking de preferencias sobre loterías U(l).

Actitudes frente al riesgo

Suponga que el individuo puede elegir entre un resultado (o consecuencia) cierto $\bar{c}$, y una lotería $l_1 \equiv (c_{11}, c_{12}; \pi_1, \pi_2)$ que cumple:

$$\bar{c} = \pi_1 c_{11} + \pi_2 c_{12}$$

El individuo es *averso al riesgo* si prefiere estríctamente $\bar{c}$ a la lotería l_1. Es *amante al riesgo* si la preferencia va en el sentido contrario, y es *neutral al riesgo,* si es indiferente entre ambos.

Una alternativa de elección como la anterior, se denomina comúnmente *juego justo* o *apuesta justa* donde "justo" se refiere a que su esperanza matemática es cero. Entonces, un individuo averso al riesgo no aceptará un juego justo como el presentado, un amante al riesgo sí lo hará, mientras que un neutral al riesgo estará indiferente.

La actitud frente al riesgo, suele ser definida también, términos de la concavidad de la función de Bernoulli. Considere la siguiente lotería con esperanza matemática igual a 250:

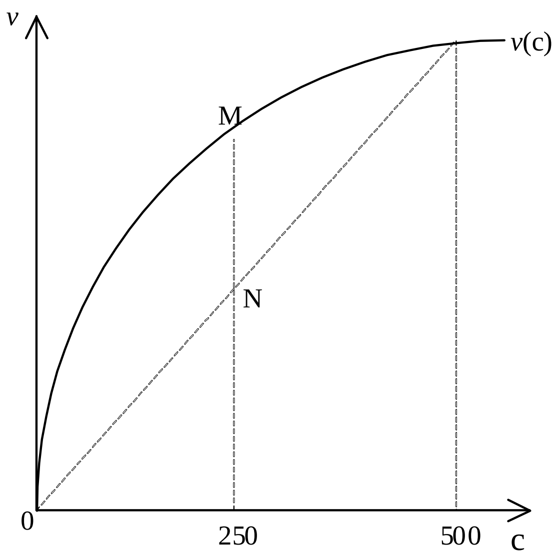
$$l_1 \equiv (0, 500; \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

La *figura 1* muestra una función de Bernoulli *v(c)* que representa preferencias sobre resultados.

En el eje de abscisas se consignan los valores de c en ambos estados de la naturaleza, y la esperanza matemática de la apuesta. La utilidad v que el individuo le asigna a la suma cierta 250, se representa por la altura del punto M. La RUE proporciona el índice de utilidad para la lotería, y es fácil de verificar utilizando (1), que la misma puede medirse geométricamente por la altura del punto N. La posición de N surge de la combinación convexa de 0 y T donde los ponderadores de la combinación son las probabilidades de ocurrencia de cada estado. Note que mientras $v(c)$ sea cóncava, la altura de M será mayor a la de N. Así:

$$\underbrace{v(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(500))}_{altura\ de\ M} > \underbrace{\frac{1}{2}v(0) + \frac{1}{2}v(500)}_{altura\ de\ N}$$

Figura 1: Función de Bernoulli.



Generalizando, si c es una variable aleatoria que puede tomar al menos dos valores con probabilidades positivas, y $v(c)$ es dos veces diferenciable, se tiene el siguiente resultado conocido como *desigualdad de Jensen:*

1. Si $v''(c) < 0$ entonces, $\mathtt{E}v(c) < v[\mathtt{E}(c)]$ y el individuo es averso al riesgo;
2. si $v''(c) = 0$ entonces, $\mathtt{E}v(c) = v[\mathtt{E}(c)]$ y el individuo es neutral al riesgo;
3. si $v''(c) < 0$ entonces, $\mathtt{E}v(c) > v[\mathtt{E}(c)]$ y el individuo es amante al riesgo.

   Donde $\mathtt{E}$ es el operador esperanza.

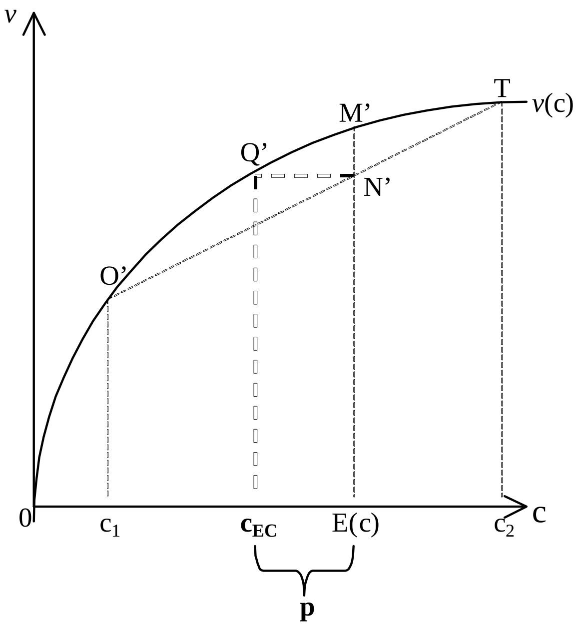
Ejercicio I: Grafique *v(c)* para los casos de individuo amante y neutral al riesgo.

Equivalente cierto y premio al riesgo

Sabemos que un individuo averso al riesgo no tomará un juego justo. Podemos preguntarnos entonces, qué cantidad “cierta” el individuo considera equivalente a una cantidad “esperada”, o cuánto está dispuesto a pagar, en términos del bien analizado, para no enfrentar un juego justo. Como veremos, las respuestas están íntimamente ligadas.

El *equivalente cierto* es el valor cierto de c, c_{EC}, que deja al individuo indiferente entre jugar o no. El *premio al riesgo* es la suma p, en términos de c, que el individuo está dispuesto a pagar para no enfrentar un juego justo. Podemos utilizar el mismo esquema gráfico del apartado anterior para analizar estos conceptos. Considere la $figura$ 2 en la que se representan las preferencias sobre resultados $v(c)$ para un individuo averso al riesgo.

Figura 2: Premio al riesgo y equivalente cierto.



Suponga que el individuo tiene en su poder la lotería $l = (c_1, c_2; \pi_1, \pi_2)$ donde $\mathtt{E}(c) = \pi_1 c_1 + \pi_2 c_2$ es igual a $\bar{c}$. Sabemos que la utilidad que el individuo le asigna a la lotería se mide por la altura del punto N'. El equivalente cierto del juego es c_{EC}, al que el individuo asigna una utilidad v (medida por la altura de Q') igual a la utilidad $U(l)$ asignada al juego. El premio al riesgo es simplemente la diferencia entre la cantidad esperada de c, $\bar{c}$, y el equivalente cierto c_{EC} (distancia $Q'N'$ en el gráfico).

Ejercicio II: Represente gráficamente e interprete el premio al riesgo y el equivalente cierto en los casos de individuo amante y neutral al riesgo.

La aversión al riesgo está relacionada con la concavidad de la función de utilidad de Bernoulli. A mayor concavidad de la misma, mayor aversión al riesgo por parte del individuo y mayor premio al riesgo. Vamos a formalizar esta afirmación. Podemos verificar en la $figura$ 2, que:

$$v(\bar{c} - p) = \sum_{s=1}^{2} \pi_s v(c_s) \tag{2}$$

Para despejar el valor p de la expresión (2) vamos a aproximar ambos términos por Taylor, en torno al punto $\bar{c}$. En primer lugar, si p es razonablemente pequeño, podemos considerar sólo la expansión lineal, de forma que el término de la izquierda puede expresarse como:

$$v(\bar{c} - p) \simeq v(\bar{c}) - v'(\bar{c})p \tag{3}$$

En segundo lugar, no podemos descartar la posibilidad de que c tome valores significativamente distintos a $\bar{c}$, así para el término de la derecha consideraremos una aproximación de segundo orden. Entonces:

$$v(c_s) \simeq v(\bar{c}) + v'(\bar{c})(c_s - \bar{c}) + \frac{v''(\bar{c})(c_s - \bar{c})^2}{2} \tag{4}$$

sumando en s,

$$\sum_{s=1}^{2} \pi_s v(c_s) \simeq v(\bar{c}) + v'(\bar{c}) \underbrace{\sum_{s=1}^{2} \pi_s (c_s - \bar{c})}_{=0} + \frac{v''(\bar{c})}{2} \underbrace{\sum_{s=1}^{2} \pi_s (c_s - \bar{c})^2}_{=\sigma_c^2} \tag{5}$$

$$\sum_{s=1}^{2} \pi_s v(c_s) \simeq v(\bar{c}) + v''(\bar{c}) \frac{\sigma_c^2}{2} \tag{6}$$

reemplazando (3) y (6) en (2) y despejando p, se obtiene:

$$p \simeq -\frac{v''(\bar{c})}{v'(\bar{c})} \frac{\sigma_c^2}{2} \tag{7}$$

donde:

$$A(c) = -\frac{v''(\bar{c})}{v'(\bar{c})} \tag{8}$$

se conoce como coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt.

De (7) surge claramente que a mayor varianza en la distribución de c, y a mayor coeficiente de aversión absoluta al riesgo, mayor es la suma en unidades de c que el individuo está dispuesto a pagar para evitar el juego.

Alternativamente podemos expresar el premio al riesgo como fracción del ingreso esperado. De esta forma:

$$\frac{p}{\bar{c}} \simeq -\frac{v''(\bar{c})\bar{c}}{v'(\bar{c})}\frac{\sigma_c^2}{2\bar{c}^2} \tag{9}$$

donde:

$$R(c) = -\frac{v''(\bar{c})\bar{c}}{v'(\bar{c})} \tag{10}$$

se conoce como coeficiente de aversión relativa al riesgo.

El coeficiente de aversión relativa al riesgo es la elasticidad de la utilidad marginal de c. Así, cuanto más rápida es la caída en la utilidad marginal, mayor es la aversión al riesgo.

Es importante recordar que estos resultados son de carácter local. Como los mismos se relacionan con la convexidad de las curvas de indiferencia en el plano de bienes estado-contingente, volveremos sobre esto más adelante.

Elección óptima de bienes estado-contingente

Dos cantidades idénticas del mismo bien no son equivalentes bajo la ocurrencia de distintos sucesos o estados de la naturaleza. En el ejemplo inicial de esta nota, llevar un abrigo cuando refresca no es igual a llevarlo cuando no refresca. Entonces, la caracterización completa de un bien, debe precisar los estados en que el mismo estará disponible. En el contexto de incertidumbre, los bienes son "contingentes" a la realización de ciertos sucesos. El individuo elige en el espacio acciones o "loterías", donde cada una de ellas especifica cuanto consumirá en cada estado de la naturaleza.

Supongamos que el consumidor deriva utilidad del consumo de un único bien c, en dos estados de la naturaleza $s = 1, 2$. La cantidad del producto consumida, si ocurre en el estado 1, es c_1, mientras que la consumida en el estado 2 es c_2.

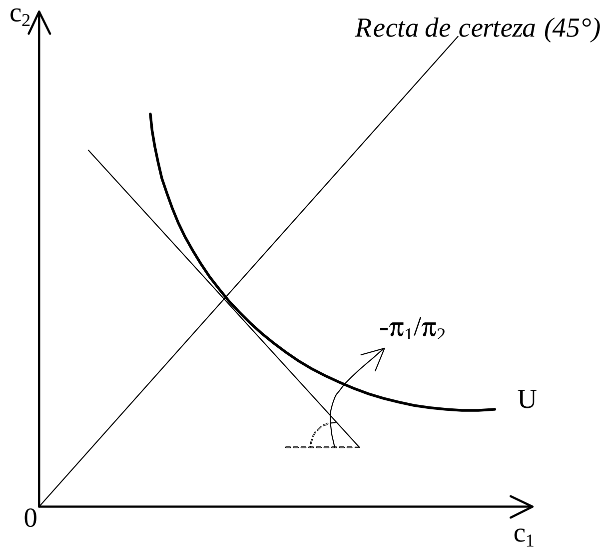
En la $figura$ 3, las combinaciones sobre la recta de certeza (45 $grados$) representan consumos "ciertos," en el sentido de que se consume la misma cantidad del producto independientemente del estado que se realice.

La regla de la utilidad esperada consiste en este caso en:

$$U(l) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2) \tag{11}$$

con: $\pi_1 + \pi_2 = 1$

Figura 3: Elección entre bienes estado-contingente.



Podemos representar un mapa de curvas de indiferencia en el plano (c_1, c_2) que estará implicado por la función de Bernoulli $v(c)$, y por las probabilidades. La expresión para la tasa marginal de sustitución es:

$$\frac{\partial c_2}{\partial c_1} |_{\bar{u}} = -\frac{\pi_1 v'(c_1)}{\pi_2 v'(c_2)} < 0 \qquad (12)$$

En la línea de certeza, se tiene que:

$$TMS = -\frac{\pi_1}{\pi_2}$$

Intuitivamente, la aversión al riesgo conduce a diversificación. Curvas de indiferencia no-convexas, combinadas con el conjunto de oportunidades del consumidor, genera soluciones de esquina. Formalmente, una función de utilidad de Bernoulli que muestra aversión al riesgo $(v,\ con\ v' > 0\ y\ v'' < 0)$ implica curvas de indiferencia convexas al origen. Derivando (12) por segunda vez:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial c_1^2} |_{\bar{u}} = -\frac{1}{[\pi_2 v'(c_2)]^3} \{\pi_1 {\pi_2}^2 v''(c_1)[v'(c_2)]^2 + {\pi_1}^2 \pi_2 v''(c_2)[v'(c_1)]^2\} > 0 \quad (13)$$

en la recta de certeza, se tiene que:

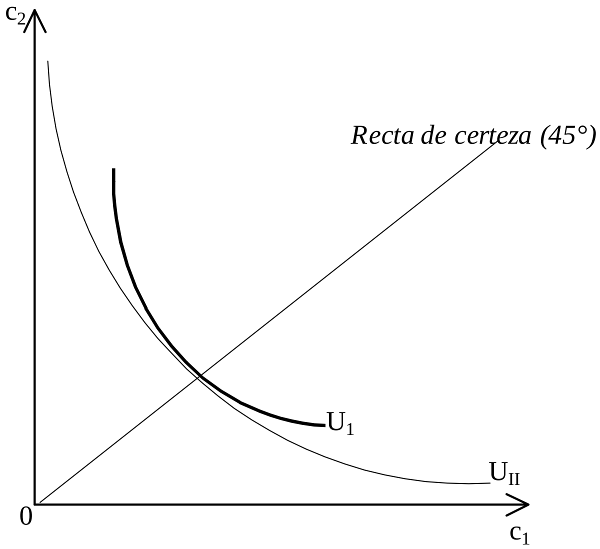
$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial c_1^2} \mid_{\bar{u}} = -\frac{\pi_1}{{\pi_2}^2} \frac{v''(c)}{v'(c)} > 0 \tag{14}$$

de (8) tenemos finalmente:

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial c_1^2} \mid_{\bar{u}} = \frac{\pi_1}{{\pi_2}^2} A(c) > 0 \tag{15}$$

La última expresión relaciona la convexidad de la curva de indiferencia con el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt: a mayor aversión absoluta al riesgo, mayor convexidad de la curva de indiferencia. En la $figura$ 4 se representan las preferencias de dos individuos I y II donde $A(c)_I > A(c)_{II}$

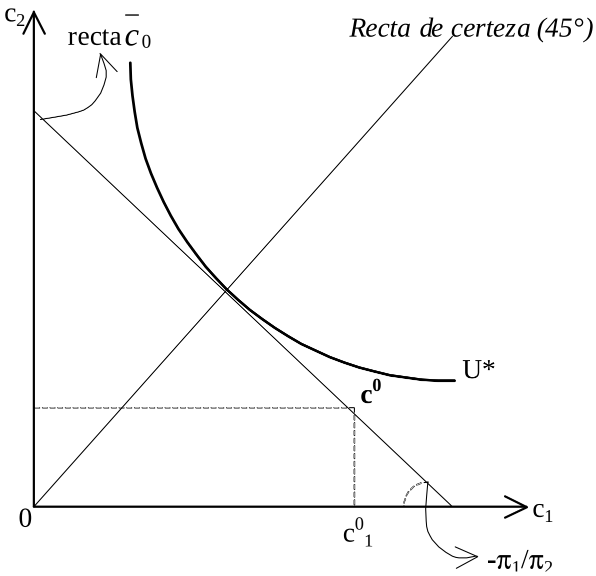
Figura 4: Aversión al riesgo.



Vamos a analizar gráficamente, en el plano de bienes contingentes, la afirmación de que un individuo averso al riesgo nunca aceptará una apuesta justa (siempre preferirá un resultado cierto, a una mezcla probabilística de consecuencias que tengan el mismo valor esperado) Considere por ejemplo la canasta $c^0 = (c_1^0, c_2^0)$ representada en la $Figura$ 5.

Dadas π_1 y π_2, podemos trazar la recta $\bar{c}^0$ que une todas las canastas (c_1, c_2) que tienen la misma esperanza matemática $\mathtt{E}(c) = \bar{c}^0$. Esto es:

Figura 5: Elección óptima entre bienes estado-contingente.



$$\pi_1 c_1 + \pi_2 c_2 = \underbrace{\pi_1 c_1^0 + \pi_2 c_2^0}_{\bar{c}^0}$$

de donde:

$$-\frac{\partial c_2}{\partial c_1} |_{\bar{c}^0} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \tag{16}$$

A lo largo de la recta $\bar{c}^0$, el punto preferido por el consumidor debe coincidir con la tangencia entre la recta $\bar{c}^0$ y una curva de indiferencia:

$$-\frac{\partial c_2}{\partial c_1} |_{\bar{c}^0} = -\frac{\partial c_2}{\partial c_1} |_{\bar{u}} \tag{17}$$

Finalmente de (16) y (17) se tiene que:

$$-\frac{\partial c_2}{\partial c_1} |_{\bar{u}} = \frac{\pi_1}{\pi_2} \tag{18}$$

Como se ha dicho, la condición anterior se cumple para cualquier curva de indiferencia sobre la línea de certeza (donde $c_1 = c_2$) Así, el consumo de $\bar{c}^0$

con certeza, es preferido a cualquier otra canasta (c_1, c_2) que ofrece el mismo consumo esperado.

Asignación óptima de riesgo en el mercado

Supongamos ahora que el individuo es tomador de precios en el mercado de bienes estado-contingente, esto es, adquiere consumo en el estado 1 al precio p_1 y consumo en el estado 2 al precio p_2. Supongamos además que inicialmente se encuentra dotado de una canasta $c_0 = (c_1^0, c_2^0)$ y que se cumplen las condiciones para que pueda representar sus preferencias sobre acciones o loterías, en la forma de utilidad esperada.

El problema del individuo es entonces maximizar $U(l)$ sujeto al valor de sus dotaciones. Analíticamente:

$$MaxU(l) = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$$

sujeto a:

$$p_1 c_1^0 + p_2 c_2^0 \geq p_1 c_1 + p_2 c_2$$

llamando $p = \frac{p_1}{p_2}$ tenemos el siguiente $lagrangiano$:

$$\mathcal{L} = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2) + \lambda[pc_1^0 + c_2^0 - pc_1 - c_2]$$

Derivando respecto a c_1, c_2, y a λ obtenemos las condiciones necesarias de primer orden para una solución interior del problema:

$$L_1 : \ \pi_1 v'(c_1) - \lambda p = 0 \tag{19}$$

$$L_2 : \ \pi_2 v'(c_2) - \lambda = 0 \tag{20}$$

$$\mathcal{L}_\lambda : \ pc_1^0 + c_2^0 - pc_1 - c_2 = 0 \tag{21}$$

La condición suficiente de segundo orden para un máximo es:

$$| H_u | = \begin{vmatrix} \pi_1 v''(c_1) & 0 & -p \\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -1 \\ -p & -1 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

De (19) y (20) se tiene que, en el óptimo, el individuo iguala las utilidades marginales esperadas ponderadas, en cada estado de la naturaleza:

$$\frac{\pi_1 v'(c_1)}{p_1} = \frac{\pi_2 v'(c_2)}{p_2} = \lambda \tag{22}$$

o, alternativamente, la curva de indiferencia es tangente a la recta de presupuesto:

$$\frac{\pi_1 v'(c_1)}{\pi_2 v'(c_2)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{23}$$

Si el juego es justo, las ganancias netas deben ser cero, entonces:

$$\pi_1 dc_1 + \pi_2 dc_2 = 0$$

sin embargo, en el mercado:

$$p_1 dc_1 + p_2 dc_2 = 0$$

Así, cuando el mercado ofrece la posibilidad de intercambiar consumo entre estados de forma justa ($\frac{p_1}{p_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$), por (23):

$$v'(c_1) = v'(c_2)$$

que se cumple, dados los supuestos sobre $v(c)$, si:

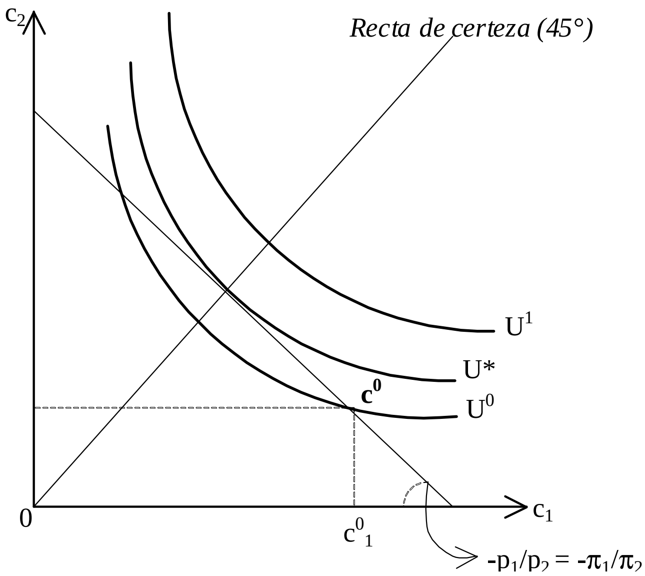
$$c_1 = c_2$$

El individuo intercambia, entonces, hasta ubicarse sobre la recta de certeza.

Por consiguiente, partiendo de una situación de certeza, un individuo averso al riesgo no aceptará una apuesta justa (no elegirá otro punto de la recta de presupuesto que no sea $c_1 = c_2$) Si en cambio su dotación cae por fuera de la recta de certeza ($c_1 \neq c_2$), cuando se le ofrece la oportunidad de intercambiar a una razón de precios justa, el individuo se asegura por completo, volviendo a la línea de certeza. El equilibrio del consumidor se representa en la $figura$ 6.

Finalmente, un individuo averso al riesgo puede aceptar una apuesta en la forma de un contrato riesgoso, cuando este contrato disminuya el riesgo

Figura 6: Elección óptima: seguro total.



de consumo implícito en su dotación. Por otra parte, si el precio relativo del mercado no representa una apuesta justa, ya sea que la dotación inicial esté o no sobre la línea de certeza, el individuo aceptará algún riesgo (la tangencia estará fuera de la línea de certeza) en la dirección de la apuesta favorable.

Estática comparativa

Cambio en el precio de un bien

Supongamos que se produce un cambio en el precio del bien 1. Derivando parcialmente las *cpo*, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 v''(c_1) & 0 & -p \\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -1 \\ -p & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial c_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{p_2} \\ 0 \\ \frac{-(c_1^0 - c_1)}{p_2} \end{pmatrix}$$

Resolviendo para el cambio en c_1:

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial p_1} = -\frac{\lambda}{p_2 \mid H_u \mid} - \frac{(c_1^0 - c_1)}{p_2} \frac{p \pi_2 v''(c_2)}{\mid H_u \mid} \tag{24}$$

con signo indefinido.

Ejercicio III: Obtenga el resto de los resultados de estática respecto del precio del bien 1.

Cambios en el ingreso

Intuitivamente, sabemos que cuando se expande el conjunto presupuestario, la cantidad de al menos uno de los bienes debe aumentar. Además, suponiendo aversión al riesgo ($v''(c) < 0$), puede verse de (22) que λ debe aumentar[6]. Más aún, por la forma aditivamente separable de la FUE, todos los bienes deben aumetar cuando uno lo hace, de forma de mantener la condición (22) Entonces, en la teoría del consumidor con aversión al riesgo y función de utilidad esperada, no existen bienes inferiores.

Llamemos ahora: $w = pc_1^0 + c_2^0$, al valor de la dotación. Derivando parcialmente el sistema respecto a w obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 v''(c_1) & 0 & -p \\ 0 & \pi_2 v''(c_2) & -1 \\ -p & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial w} \\ \frac{\partial c_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo para el cambio en c_1 tenemos:

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial w} = -\frac{p\pi_2 v''(c_2)}{\mid H_u \mid} > 0 \qquad (25)$$

Ejercicio IV: Resuelva las estáticas restantes.

El problema dual

Considere ahora el caso en que el individuo desea minimizar el gasto necesario para obtener un cierto nivel de utilidad esperada. Analíticamente podemos pensar que minimiza c_2^0 dada la dotación del bien en el estado 1, c_1^0, y el nivel objetivo de utilidad $\bar{u}$.

El problema es entonces:

$$\text{Min } c_2^0 = pc_1 + c_2 - pc_1^0$$

sujeto a:

$$\bar{u} = \pi_1 v(c_1) + \pi_2 v(c_2)$$

[6] *En el caso de certeza* ($\frac{\partial \lambda}{\partial w}$) *no tenía signo definido.*

El *lagrangiano* del problema es:

$$\mathcal{L} = pc_1 + c_2 - pc_1 + \mu[\bar{u} - \pi_1 v(c_1) - \pi_2 v(c_2)]$$

Derivando respecto a c_1, c_2, y a μ obtenemos las condiciones necesarias de primer orden para una solución interior del problema:

$$L_1 : \ p - \mu\pi_1 v'(c_1) = 0 \tag{26}$$

$$L_2 : \ 1 - \mu\pi_2 v'(c_2) = 0 \tag{27}$$

$$\mathcal{L}_\mu : \ \bar{u} - \pi_1 v(c_1) - \pi_2 v(c_2) = 0 \tag{28}$$

La condición suficiente de segundo orden para un mínimo es:

$$\mid H_g \mid = \begin{pmatrix} -\mu\pi_1 v''(c_1) & 0 & -\pi_1 v'(c_1) \\ 0 & -\mu\pi_2 v''(c_2) & -\pi_2 v'(c_2) \\ -\pi_1 v'(c_1) & -\pi_2 v'(c_2) & 0 \end{pmatrix} < 0$$

De (26) y (27) se obtiene la condición de igualdad entre la TMS y la relacion de precios. Derivando las *cpo* respecto de p_1 obtenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} -\mu\pi_1 v''(c_1) & 0 & -\pi_1 v'(c_1) \\ 0 & -\mu\pi_2 v''(c_2) & -\pi_2 v'(c_2) \\ -\pi_1 v'(c_1) & -\pi_2 v'(c_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial c_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{p_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo para el cambio en c_1 :

$$\frac{\partial c_1^h}{\partial p_1} = \frac{[\pi_2 v'(c_2)]^2}{p_2 \mid H_g \mid} < 0 \tag{29}$$

Ejercicio V: Verificar que $\mid H_g \mid = -\lambda \mid H_u \mid$.

Volviendo a los resultados obtenidos en (24), (25) y (29) es fácil verificar que la ecuación de Slutsky para $\frac{\partial c_1^*}{\partial p_1}$ es:

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial c_1^h}{\partial p_1} + \frac{(c_1^0 - c_1)}{p_2}\frac{\partial c_1^*}{\partial w} \tag{30}$$

con signo indefinido.

El cambio en la demanda compensada es negativo, mientas que el signo de $\frac{\partial c_1^*}{\partial w}$ es positivo bajo las condiciones analizadas. Finalmente, el signo de $\frac{\partial c_1^*}{\partial p_1}$ depende del término $(c_1^0 - c_1)$

1. Si $(c_1^0 - c_1) > 0$, el individuo es oferente neto de c_1, y el signo de $\frac{\partial c_1^*}{\partial p_1}$ es ambiguo;
2. si en cambio $(c_1^0 - c_1) < 0$, el individuo es demandante neto de c_1, entonces $\frac{\partial c_1^*}{\partial p_1} < 0$

Contratación de un seguro

Vamos a analizar ahora el problema de la contratación de un seguro, como aplicación del enfoque de bienes estado-contingente.Considere un individuo averso al riesgo, que posee una riqueza de w, y enfrenta, con probabilidad π, la ocurrencia de un siniestro que le reportará una pérdida de l. Tiene a su disposición la contratación de una póliza que le cubre un monto K, por la que debe pagar γK, donde γ es la prima por peso asegurado que establece la firma aseguradora.

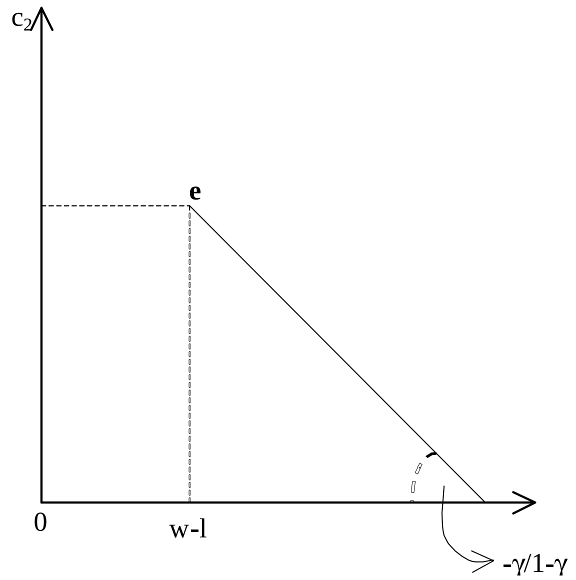
En la $figura$ 7 se representa el problema del individuo en el plano de bienes estado-contingente $c_1 - c_2$ donde c_1 representa su riqueza en caso de que ocurra el accidente estado 1, mientras que c_2 es la riqueza en caso de que no ocurra el estado 2. La dotación puede representarse por el punto $e = (w - l, w)$ Cuando el individuo se asegura, resigna γK de su riqueza en el estado 2, a cambio de $K - \gamma K$ en el estado 1.

Así, la relación a la que puede intercambiar riqueza en cada uno de los estados viene dada por:

$$-\frac{\partial c_2}{\partial c_1}\,|_w = \frac{\gamma K}{K - \gamma K} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \tag{31}$$

Sabemos que, dadas las características de la función de utilidad esperada, el individuo se ubicará sobre la tangencia de la curva de indiferencia y la recta de intercambio. Entonces, el individuo elegirá el monto K a asegurar, de forma de maximizar su utilidad esperada, sujeto a la restricción impuesta

Figura 7: Riqueza en ambos estados.



por su riqueza y por el precio al que puede comprar el seguro. Analíticamente, el problema del individuo es:

$$MaxU(a) = \pi v(c_1) + (1-\pi)v(c_2)$$

donde:

$$c_1 = w - l - \gamma K + K \tag{32}$$

$$c_2 = w - \gamma K \tag{33}$$

Reemplazando (32) y (33) en la función de utilidad:

$$MaxU(a) = \pi v(w - 1 - \gamma K + K) + (1-\pi)v(w - \gamma K)$$

Derivando respecto a K obtenemos la condición de primer orden para una solución interior y la condición de segundo orden:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = (1-\gamma)\pi v'(c_1) - \gamma(1-\pi)v'(c_2) = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial K^2} = (1-\gamma)^2\pi v''(c_1) + \gamma^2(1-\pi)v''(c_2) < 0 \tag{35}$$

Reordenando términos en (34):

$$\frac{\pi v'(c_1)}{(1-\pi)v'(c_2)} = \frac{\gamma}{1-\gamma} \tag{36}$$

Por otra parte, la compañia de seguros resuelve:

$$Max\ B = \gamma K - \pi K$$

Si cobra una prima "justa", en promedio no gana ni pierde ($B = 0$), de forma que $\gamma = \pi$. Reemplazando en la condición (36) tenemos ahora:

$$v'(c_1) = v'(c_2) \tag{37}$$

que se cumple si:

$$c_1 = c_2 \tag{38}$$

Entonces, dado que en la dotación se tiene que $c_2 > c_1$ (y por lo tanto $v'(c_1) > v'(c_2)$) el individuo encontrará ventajoso reasignar riqueza pasando, riqueza en el estado 2, a riqueza en el estado 1. Utilizando (32) y (33) se tiene finalmente:

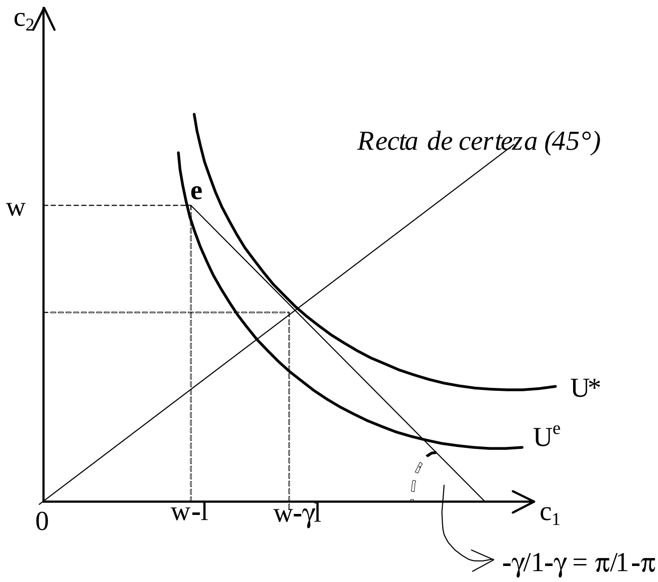
$$K^* = l \tag{39}$$

Un individuo averso al riesgo, que tiene la posibilidad de contratar un seguro pagando una prima justa (igual a la probabilidad del accidente), se asegurará totalmente. Esta situación se representa en la $figura$ 8.

Considere ahora el caso en que la prima que se le ofrece pagar es "desfavorable", $\gamma > \pi$. Los beneficios esperados de la firma serán positivos. De (34), y dado que $(1-\pi)\gamma > \pi(1-\gamma)$ se tiene en este caso:

$$v'(c_1) > v'(c_2)$$

Figura 8: Equilibrio: seguro total.



lo que implica:

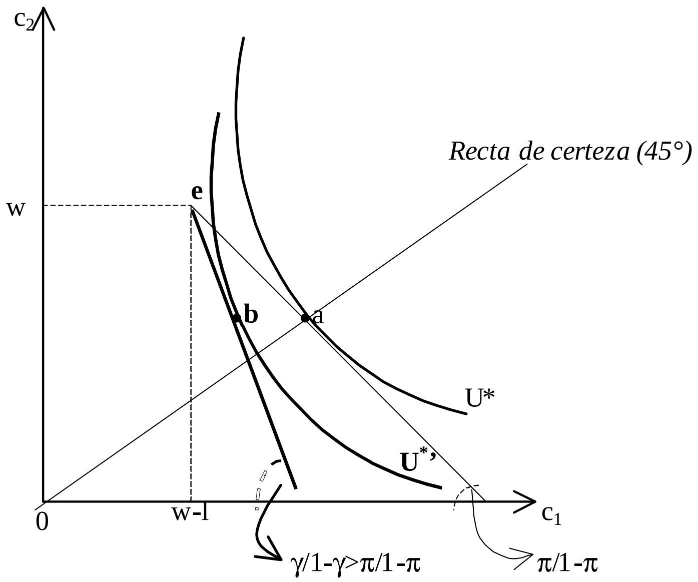
$$c_1 < c_2 \tag{40}$$

y finalmente:

$$K^* < l \tag{41}$$

El individuo averso al riesgo, enfrentado a una prima desfavorable, elige asegurarse parcialmente. Gráficamente, el individuo de ubica en el punto b de la $figura$ 9.

Figura 9: Equilibrio: seguro parcial.



Referencias

[1] Alchian, A.,(1953) The Meaning of Utility Measurement. American Economic Rewiew, vol 43.

[2] Gravelle, H. y Rees, H.,(1984) Microeconomía. Alianza Universidad Textos.

[3] Hirshleifer, J. and Riley, G.,(1992) The Analytics of Uncertainty and Information. Cambridge surveys of economic literature, CUP.

[4] Laffont, J. J.,(1988) The Economics of Uncertainty an Information.

[5] Knight, F. H.,(1921) Risk, Uncertainty and Profit. New York. Houghton Mifflin. Information. Cambridge surveys of economic literature, CUP.

[6] Layard, P. Y Walters, A.,(1978) Microeconomic Theory. McGraw Hill.

[7] Neumann, J. and Morgenstern, O.,(1944) Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

[8] Silberberg, E.,(1990) The Structure of Economics: A Mathematical Analysis. McGraw Hill.

[9] Varian, H.,(1998) Análisis Microeconómico. Antoni Bosch Ed.

[10] Varian, H.,(1994) Microeconomía Intermedia. Antoni Bosch Ed.