

**RELACION ENTRE VOLATILIDAD EN TASAS DE CRECIMIENTO DEL PRODUCTO
Y VOLATILIDAD EN EL PRECIO DEL STOCK DE CAPITAL Y SU IMPACTO EN EL
NIVEL DE INVERSIÓN AGREGADA DE LA ECONOMÍA**

**José Pablo Dapena
jd@cema.edu.ar
UNIVERSIDAD DEL CEMA**

La tradicional regla marshalliana de inversión (o abandono) cuando el valor del activo subyacente es mayor (o menor) al costo de la inversión se ve modificada cuando existen situaciones de incertidumbre e irreversibilidad, generando un componente de opción en dichas decisiones. Este componente se ve afectado por la volatilidad del activo subyacente, que a su vez puede encontrar en el agregado su origen en la volatilidad de la tasa de crecimiento de la economía. La evidencia de volatilidad afecta las decisiones de inversión en el agregado, y repercute en el proceso de formación de capital y por ende en las posibilidades de crecimiento a largo plazo. Se explora de manera cuantitativa la relación entre tasas de crecimiento del producto y volatilidad del precio del stock de capital.

JEL: G00, G31, O16.

Palabras claves: volatilidad, opciones reales, inversión, mercado de capitales.

Agradezco los comentarios vertidos en la presentación durante la XXXIX Reunión Anual de la AAEP. Todos los errores son de mi responsabilidad. Las opiniones presentadas en este trabajo pertenecen al autor y no reflejan necesariamente las de la Universidad del CEMA.

1 Introducción

La línea de investigación sobre volatilidad estructural del producto de una economías explorada por Caballero y Krishnamurty (1998), quienes relacionan las crisis o períodos de alta volatilidad con insuficiencia de colateral (inicialmente externo que produce efectos en el colateral interno), punto también tratado en Caballero y Krishnamurty (2001), mientras que Caballero (2000a y 2000b) estudia evidencia de volatilidad en Latinoamérica (tratando tres casos de estudio), vinculando la misma a vínculos internacionales débiles y subdesarrollo del sistema financiero doméstico, lo que hace a la economía sensible a cambios en los movimientos de capitales internacionales. Este tipo de consideraciones ha sido tratado por Calvo (1998) relacionando flujo de capitales internacional y la cuenta corriente de la economía doméstica, y la vulnerabilidad que se manifiesta a partir de dicha situación. De manera mas reciente Ridditz (2003) relaciona volatilidad del PBI per cápita con liquidez del sistema financiero, encontrando evidencia que una mayor liquidez tiende a atenuar la volatilidad. Respecto de las inversiones, las mismas son en general decididas en función al valor de las mismas (a través de descontar el flujo de fondos que generarían) en relación a su costo de emplazamiento¹. Este tipo de metodología de valuación y de decisión es complementada por los modelos diseñados por Black y Sholes (1973) y Merton (1973) que derivan una fórmula cerrada para valuar (bajo ciertas condiciones) inversiones con características de opciones financieras; Cox, Ross y Rubinstein (1979) contribuyen a la literatura incorporando el concepto de metodología de valuación en entornos neutrales al riesgo. No obstante estos modelos de opciones surgen para proveer fundamento en la valuación de opciones financieras, Myers (1977) es el primero en notar en su análisis sobre la capacidad de endeudamiento de una firma, que el total de activos de la misma está compuesto por: capital instalado por un lado y opciones de crecimiento por el otro, asemejándose estas últimas en su función de repago a opciones de compra (calls) sobre el valor de flujos de fondos futuros generados por inversiones reales. Mc Donald y Siegel (1984, 1985 y 1986) desarrollan estudios donde exponen las analogías entre las funciones de repago de opciones financieras y las equivalentes para cierto tipo de inversiones en activos reales (tales como opciones de crecimiento, opciones de espera y opciones de abandono de inversiones). Este enfoque es muy bien expuesto en un libro de Dixit y Pindyck (1994) donde muestran como la incertidumbre puede afectar reglas de inversiones hasta ese momento consideradas como garantizadas bajo la metodología de evaluación por flujo de fondos descontados ajustados por riesgo. Mas recientemente, esta corriente de la literatura ha sido alimentada con trabajos de Trigeorgis (1988, 1997), Kulatilaka (1992, 1995^a) entre otros.

En base a esta literatura, y en base a evidencia empírica, es el objetivo de este trabajo presentar una comparación de volatilidad de tasas de crecimiento comparada a nivel internacional, a partir de allí proponer un modelo que relacione el crecimiento de la economía con el valor de mercado del stock de capital y su influencia en la formación del stock del mismo, y el impacto que tiene la volatilidad en las decisiones de inversión en el agregado, en la formación del stock de capital, y en definitiva en las posibilidades de crecimiento de la economía en el largo plazo.. En la parte final se proporciona evidencia empírica a partir del análisis histórico de series de datos de una potencial relación entre la tasa de variabilidad del valor de mercado del stock de capital (a través del proxy de índices de precios de acciones) y de la variabilidad de la tasa de crecimiento de la economía.

¹ Ver Hirshleifer (1958).

2 Análisis de series de datos sobre tasa de crecimiento del producto para diferentes economías

El primer análisis que surge interesante realizar es relativo al comportamiento dinámico de la variable de producto real Q (o alternativamente PBI) de una economía en un período de tiempo extenso y considerando un conjunto de diferentes países. En general los estudios del producto se focalizan principalmente en la tasa de crecimiento del mismo, sea a nivel agregado o a nivel del producto per cápita; por ello en el desarrollo de este capítulo es la intención proponer un análisis de no solo dicho promedio, sino también del grado desviación estándar o volatilidad de dicha tasa. A esos efectos se toman estadísticas de PBI (GDP Volume con base 1995 = 100 del Fondo Monetario Internacional desde 1970 a 2001²). De dichas series filtro dos parámetros, la tasa de crecimiento promedio del PBI, y la volatilidad o variabilidad asociada a dicha tasa de crecimiento. Una mayor volatilidad o variabilidad se puede asociar a una economía mas incierta o poco estable, que puede alcanzar tasas muy altas o muy bajas de crecimiento. A los efectos de exponer los resultados comparativos respecto de dicho parámetro de estudio, agrupo los países en cuatro regiones representativas de distribución geográfica y relevancia internacional: I - países industrializados (G-7), II - Europa, III- América Latina y IV -Asia Pacifico. La siguiente tabla expone los resultados para tres períodos de tiempo superpuestos: de 1970 a 2001, de 1985 a 2001, y de 1990 a 2001:

Tabla 1 Cuadro Comparativo de volatilidad en la tasa de crecimiento del PBI

	Volatilidad Estimada 1970- 2001	Volatilidad Estimada 1985- 2001	Volatilidad Estimada 1990- 2001		Volatilidad Estimada 1970- 2001	Volatilidad Estimada 1985- 2001	Volatilidad Estimada 1990- 2001
I - PAISES INDUSTRIALIZADOS G-7				III - LATINOAMERICA			
Alemania*	2.7%	3.1%	3.8%	Chile	6.2%	3.3%	3.6%
Japon*	2.6%	2.5%	2.3%	Ecuador*	5.9%	4.1%	3.3%
Canada	2.3%	1.9%	2.1%	Peru*	5.7%	6.5%	4.7%
Estados Unidos	2.2%	1.3%	1.5%	Argentina	5.2%	5.8%	5.4%
Reino Unido	2.1%	1.7%	1.6%	Venezuela*	4.5%	4.9%	4.7%
Italia*	1.9%	1.1%	1.1%	Brasil*	4.3%	2.6%	2.1%
Francia	1.5%	1.3%	1.2%	Uruguay*	4.2%	3.7%	3.7%
				Paraguay*	4.0%	2.1%	1.7%
II - EUROPA							
Portugal*	3.2%	2.2%	2.1%	Mexico	3.8%	3.4%	3.6%
Irlanda*	2.9%	2.9%	3.1%	Bolivia	3.0%	2.4%	1.7%
Espania*	2.2%	1.7%	1.7%	Colombia	2.7%	2.8%	3.1%
Suiza	2.2%	1.5%	1.4%	IV - ASIA PACIFICO			
Dinamarca*	2.1%	1.6%	1.5%	Hong Kong*	4.8%	4.4%	3.8%
Holanda	2.0%	1.8%	2.0%	Tailandia*	4.4%	5.6%	6.0%
Austria	1.9%	1.1%	1.2%	Indonesia*	4.3%	5.1%	6.2%
Suecia*	1.9%	2.0%	2.4%	Malasia*	4.1%	5.0%	5.0%
Noruega*	1.8%	1.6%	1.4%	Corea	3.9%	4.3%	4.7%
				China*:**	3.3%	3.4%	3.0%
				India*	3.1%	2.0%	2.0%
				Nueva Zelandia*	2.8%	2.7%	2.4%
				Australia	1.9%	1.7%	1.9%

Fuente: Elaboración propia en base a estadísticas de FMI

* datos hasta 2000;** datos desde 1978

Se observa de la tabla que las economías latinoamericanas y las asiáticas poseen niveles de volatilidad mas altos en la tasa de crecimiento de su producto que las economías industrializadas y de Europa. Asimismo, por diferencia entre las columnas, se observa economías que han experimentado períodos turbulentos de 1970 a 1985, para luego estabilizarse en tasas de crecimiento mas predecibles. En otros casos la volatilidad es razonablemente constante en los tres períodos considerados. Un caso

² 2000 en el caso que la última observación no esté disponible en la base de datos analizada.

interesante observado es el de Chile; tiene alta tasa de volatilidad en la primera serie, pero la misma cae a partir de 1985 de manera significativa³. De manera similar se comporta la economía brasileña. Los casos de Tailandia e Indonesia representan el caso inverso, son muy estables en la serie de 30 años, pero muy volátiles en la serie de los 90' (algo similar sucede con la mayoría de las economías asiáticas consideradas) reflejando quizá el período turbulento de crisis que enfrentaron en 1997. Un caso especial es el de la economía argentina (que se encuentra resaltado) ya que el indicador de volatilidad es muy estable, pero muy alto en relación al resto, lo que refleja que de manera continua la economía argentina ha experimentado tasas de crecimiento significativamente inciertas.

Tomando como punto de partida esta comparación con respecto a las tasas de volatilidad del crecimiento, la misma puede ser complementada con el indicador de crecimiento promedio de la economía. Bajo este enfoque, se puede considerar una aproximación hacia consideraciones de riesgo-retorno asociados a la evolución de los agregados de cada economía; una mayor volatilidad en la tasa de crecimiento del producto de la economía debiera ser en equilibrio compensada con una mayor tasa de crecimiento promedio de la misma, de manera de atraer inversiones y por ende incrementar el stock de capital y el producto potencial⁴ y eventualmente generar expectativas de crecimiento y de empleo. Con estos dos parámetros para cada economía, se puede mapear en un gráfico, donde el eje horizontal mida tasa de crecimiento promedio, mientras que el eje vertical refleja el grado de variabilidad de dicha tasa. Asimismo, a los efectos de exposición, se puede separar el gráfico en cuatro secciones reflejando:

- bajo crecimiento promedio - baja volatilidad (sección A),
- alto crecimiento promedio - alta volatilidad (sección C),
- alto crecimiento promedio- baja volatilidad (sección B),
- bajo crecimiento promedio- alta volatilidad (sección D).

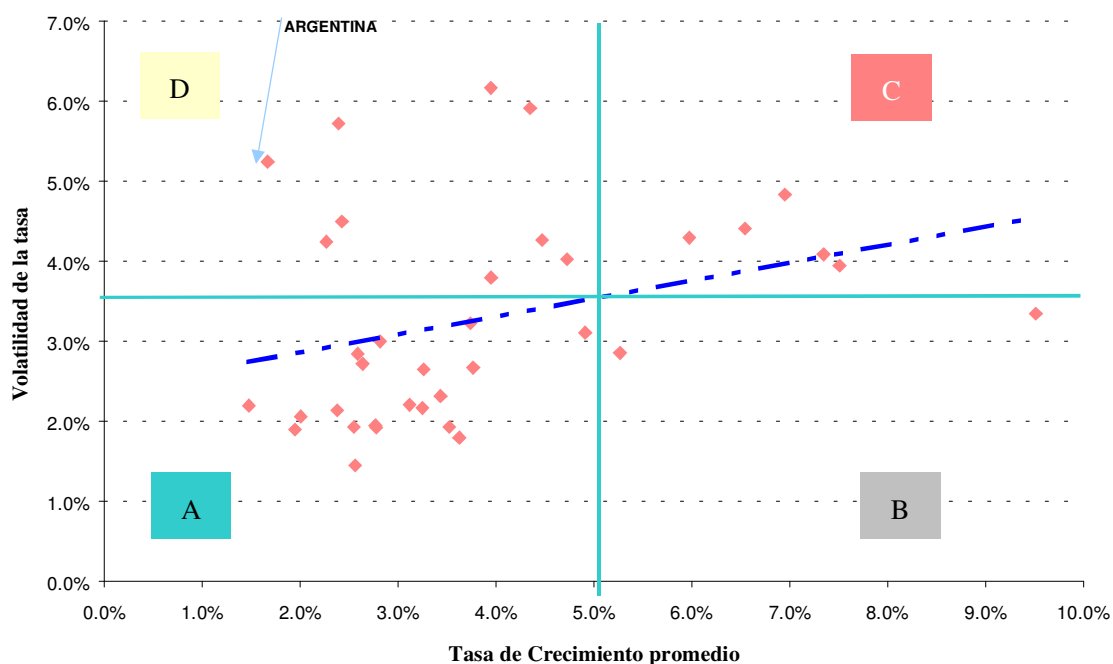
De un análisis donde el riesgo o volatilidad debiera ser compensado con crecimiento, los segmentos donde se espera se agrupen en equilibrio las economías son los sectores A y C por ser consistente los indicadores de crecimiento promedio con los indicadores de volatilidad. El segmento mas apetecible vendría dado por la sección B, donde los indicadores evidenciarían economías con altas tasas de crecimiento promedio, y bastante consistentes en el tiempo; finalmente, el segmento que no debiera despertar mucho atractivo desde el punto de vista de la inversión macroeconómica sería el D, ya que expone economías con bajas tasas de crecimiento promedio pero con alta tasa de volatilidad.

Exponiendo esta información, en el siguiente gráfico se observan los resultados para la serie desde 1970 a 2001 (donde se expone también una recta de tendencia que permite observar la relación positiva entre tasa de crecimiento promedio y volatilidad de la tasa en el agregado de indicadores de países):

³ Producto quizá de las reformas estructurales emprendidos durante la década de los '80.

⁴ Un enfoque muy simple de riesgo retorno aplicado a la inversión agregada en la economía.

Gráfico 1 Relación de Volatilidad de tasas de crecimiento de PBI y tasa de crecimiento promedio - Período 1970 -2001



cuyos resultados son expresados en la siguiente tabla:

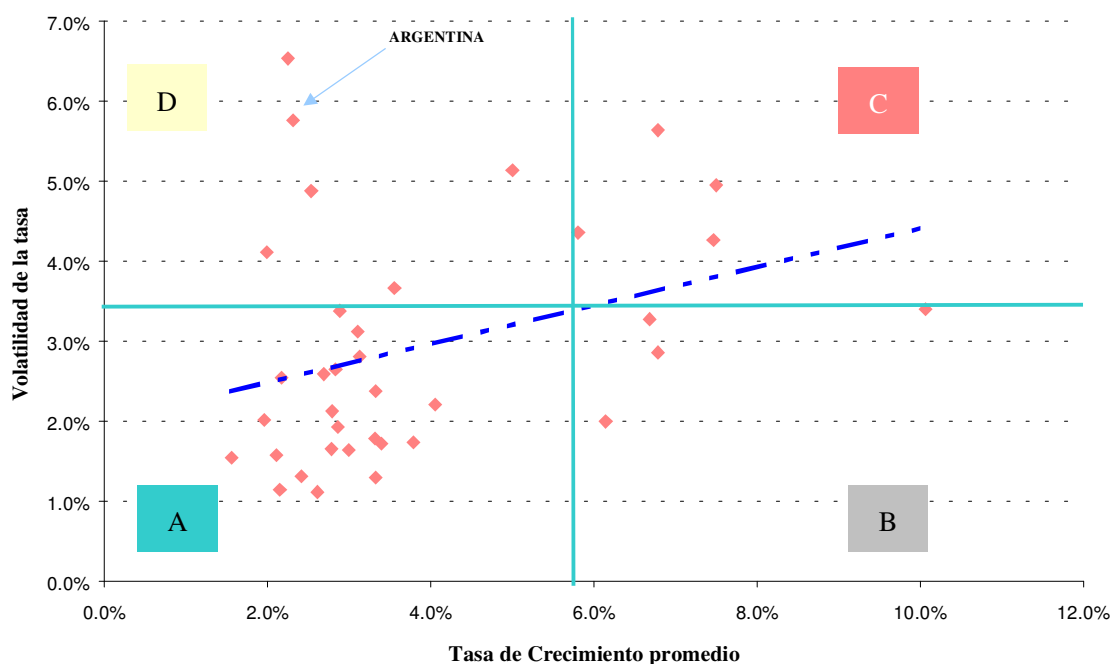
Tabla 2 Agrupación de Países en secciones Período 1970 - 2001

Período 1970 - 2001				
Baja Volatilidad y Bajo Crecimiento		Alta Volatilidad y Bajo Crecimiento	Baja Volatilidad y Alto Crecimiento	Alta Volatilidad y Alto Crecimiento
Alemania	India	Argentina	China	Corea
Australia	Italia	Brasil*	Irlanda	Hong Kong
Austria	Japon	Chile		Indonesia
Bolivia	Noruega	Ecuador*		Malasia
Canada	Nueva Zelandia	Mexico		Tailandia
Colombia	Portugal	Paraguay		
Dinamarca	Reino Unido	Peru		
España	Suecia	Uruguay		
Estados Unidos	Suiza	Venezuela		
Francia				
Holanda				

Se observa que las economías desarrolladas se encuentran principal y previsiblemente en el segmento de bajo crecimiento promedio y baja volatilidad, mientras que el sector de alto crecimiento promedio y alta volatilidad en este periodo de 30 años es ocupado principalmente por las economías del sudeste asiático. En el segmento mas atractivo (alto crecimiento promedio - baja volatilidad) se encuentran Irlanda y China; finalmente, el segmento de bajo crecimiento promedio y alta variabilidad agrupa en su mayoría a las economías latinoamericanas.

Considerando desde 1985, los resultados mapeados evidencian de acuerdo al siguiente gráfico:

Gráfico 2 Relación de Volatilidad de tasas de crecimiento de PBI y tasa de crecimiento promedio - Período 1985 - 2001



Del mismo se observa que los principales resultados se mantienen, evidencia expuesta mas abajo en tabla 3, con mención a las siguientes observaciones. El segmento potencialmente mas atractivo que he rotulado como B ubica adicionalmente en este período a las economías de Chile y de la India, que se suben al lote de alto crecimiento promedio y baja volatilidad. La mayoría de las economías latinoamericanas se ubican en bajo crecimiento promedio, con algunas con altas tasas de volatilidad y otras con bajas tasas (como el caso de Brasil, que evidencia una tasa de volatilidad menor en este período). De las economías asiáticas, Indonesia se ubica también en este segmento D.

Tabla 3 Agrupación de Países en secciones Período 1985 - 2001

Período 1985 - 2001				
Baja Volatilidad y Bajo Crecimiento		Alta Volatilidad y Bajo Crecimiento	Baja Volatilidad y Alto Crecimiento	Alta Volatilidad y Alto Crecimiento
Alemania	Holanda	Argentina	Chile	Corea
Australia	Italia	Ecuador	China	Hong Kong
Austria	Japon	Indonesia	India	Malasia
Bolivia	Mexico	Peru	Irlanda	Tailandia
Brasil	Noruega	Uruguay		
Canada	Nueva Zelandia	Venezuela		
Colombia	Paraguay			
Dinamarca	Portugal			
España	Reino Unido			
Estados Unidos	Suecia			
Francia	Suiza			

La economía argentina en ambas mediciones se encuentra en el segmento de bajo crecimiento promedio y alta volatilidad, siendo la medición de este último parámetro relativamente alta con respecto al resto, aspecto ya resaltado en Tabla 1.

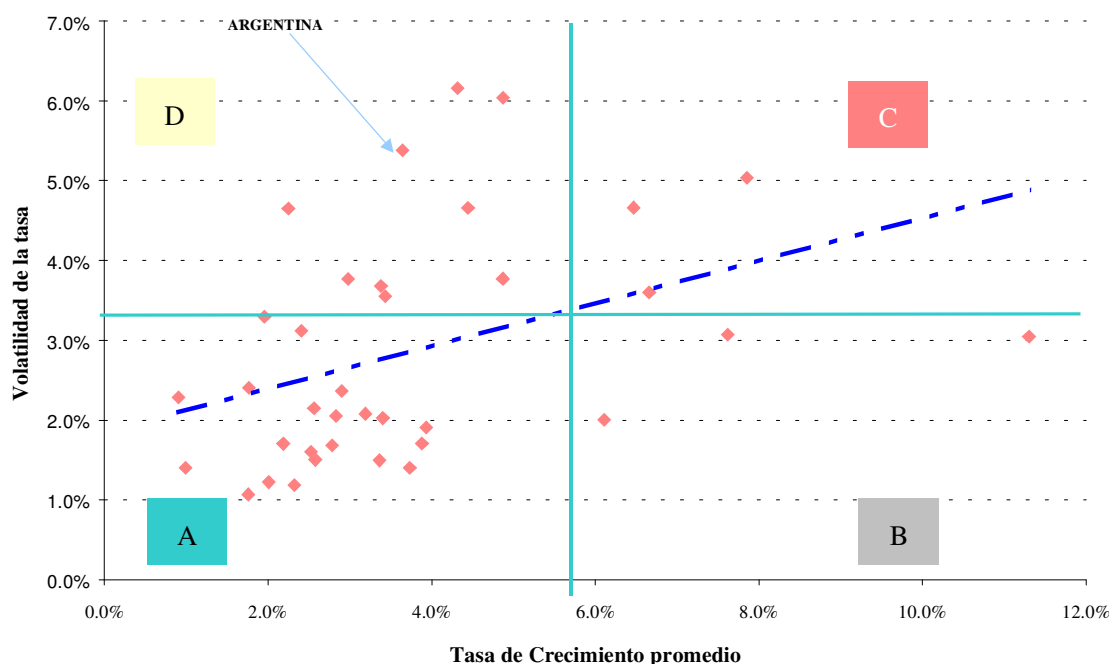
Finalmente la última serie expone los estimadores de crecimiento promedio y de volatilidad para el período que va desde 1990 hasta 2001. Existen algunos cambios de posiciones, motivados principalmente porque el mismo es un período turbulento para las economías asiáticas (se debe recordar que hubo crisis cambiaria y bancaria durante 1997). Los resultados se exponen en la siguiente tabla:

Tabla 4 Agrupación de Países en secciones Período 1990 - 2001

Período 1990 - 2001				
Baja Volatilidad y Bajo Crecimiento	Alta Volatilidad y Bajo Crecimiento	Baja Volatilidad y Alto Crecimiento	Alta Volatilidad y Alto Crecimiento	
Australia	Holanda	Alemania	China	Chile
Austria	Italia	Argentina	India	Corea
Bolivia	Japon	Hong Kong	Irlanda	Malasia
Brasil	Noruega	Indonesia		
Canada	Nueva Zelanda	Mexico		
Colombia	Paraguay	Peru		
Dinamarca	Portugal	Tailandia		
Ecuador	Reino Unido	Uruguay		
España	Suecia	Venezuela		
Estados Unidos	Suiza			
Francia				

y son mapeados en el siguiente gráfico:

Gráfico 3 Relación de Volatilidad de tasas de crecimiento de PBI y tasa de crecimiento promedio - Período 1990 - 2001



De los datos expuestos para este período considerado (1990 - 2001) surgen las siguientes consideraciones: la economía chilena se mantiene con altas tasas de

crecimiento pero con evidencia de volatilidad mas alta (esto puede venir originado por efecto de contagio de crisis externas tales como la asiática); las economías asiáticas pierden su ritmo de crecimiento pero mantienen altas tasas de volatilidad (nuevamente, el efecto de la crisis asiática se puede ver reflejado en estos indicadores); la economía brasileña dentro de las latinoamericanas se mantiene en el segmento A; la economía alemana evidencia una mayor tasa de volatilidad (producto quizá de la unificación alemana); y con respecto a la economía argentina, no obstante se observa una mayor tasa de crecimiento promedio (resultado probable de la implementación de un plan económico a durante los ' 90) que eventualmente podría compensar la alta volatilidad que sigue manifestando, dicha tasa no es suficiente para sacar el indicador del segmento D hacia el segmento C, lo que mantiene dicha observación en el segmento de bajo crecimiento promedio y alta volatilidad, manteniendo este último indicador un nivel relativamente alto.

Resumiendo algunos aspectos, se observa:

- el grupo de países industrializados tiene un menor rango de volatilidad en las distintas observaciones. En este grupo es significativo el caso de Irlanda, con muy baja volatilidad y altas tasas de crecimiento.
- el grupo de países de América Latina tiene una alta volatilidad, al igual que el grupo de países de Asia Pacífico, ambos denominados mercados emergentes⁵, evidencia que encuentran Caballero (2000^a y 2000b) y Ridditz (2003), aunque este último en volatilidad del PBI per capita⁶. Chile y Brasil son dos casos interesantes que en el tiempo se ha movido hacia afuera del segmento D.
- Argentina tiene sistemáticamente en las tres mediciones una volatilidad entre las mas altas de América Latina (no directamente vinculada a alta tasa de crecimiento).

Sin entrar a desarrollar en profundidad los determinantes de dicha volatilidad para el caso argentino⁷ o en su conjunto para Latinoamérica, es interesante explorar las implicaciones que tiene esta evidencia en cuanto a las decisiones de inversión que se llevan adelante e impacto sobre la volatilidad en el precio del stock de capital agregado a través del mercado de capitales (aspecto que se tratará en el presente capítulo y en el cuarto, y arquitectura de financiamiento e instrumentos que se utilizan (que será motivo de análisis en el tercer capítulo).

3 Un modelo estilizado de la relación dinámica entre la tasa de crecimiento de la economía y el valor agregado del stock de capital

La economía produce un output agregado en un período de tiempo a partir de la utilización de distintos recursos. Uno de los recursos utilizados dentro del proceso de producción de bienes y servicios es el stock de capital K, de forma que el output puede ser definido como una función del mismo y del resto de factores involucrados en el proceso de producción de bienes y servicios:

$$Q_t = f (K_{t-1}, \Phi) \tag{1}$$

⁵ Ridditz (2003) encuentra evidencia de volatilidad utilizando el PBI per cápita y de influencia de la liquidez en la volatilidad como consecuencia del subdesarrollo del sistema financiero. En este caso utilizo PBI agregado porque el objetivo de análisis es la inversión agregada y en el capítulo III su estructura de financiamiento.

⁶ En el presente trabajo utilizo PBI agregado y no per cápita debido que considero que en el análisis del financiamiento estructural es relevante considerar el agregado.

⁷ Para un análisis de causas de volatilidad macroeconómica estructural, ver Caballero (2000).

donde Φ representa el set del resto de factores (tales como trabajo, tecnología, etc.)⁸. Conforme lo generalmente aceptado en la literatura, la derivada primera y segunda de Q con respecto a K (manteniendo Φ constante) son positiva y negativa respectivamente. El stock de capital en cada momento está dado, siendo la inversión la variable de flujo que lo incrementa ajustando el nivel del mismo de acuerdo a las necesidades de capital del output⁹. Si consideramos que dado Φ debe existir un stock de capital K^* óptimo en la economía que permite producir de manera eficiente conforme a (1), la variable de inversión permite ajustar en el tiempo el nivel de capital K hacia dicho óptimo, por lo que defino la inversión como el incremento en el tiempo del stock de capital de la economía:

$$I_t = K_t - K_{t-1} - \pi K_{t-1} \quad (2)$$

donde π representa la tasa de depreciación del stock de capital existente y (2) dice que para que el stock de capital cambie por unidad de tiempo, la inversión bruta I^{10} debe superar a la tasa de depreciación del capital πK^{11} . Cambios en las condiciones de mercado pueden hacer cambiar el stock de capital óptimo K^* necesario en la economía, y dado que el stock de capital real es fijo en cada momento del tiempo, el mismo no puede pegar saltos para ajustarse a dichos cambios sino que lo hace a través de la inversión y la depreciación, por lo que se hace necesario introducir una variable q de precio real "sombra" del stock de capital¹², que permita absorber de manera instantánea todos los desequilibrios que puedan surgir entre variaciones en el nivel de capital observado y el nivel de capital óptimo hasta tanto la inversión ajusta dicha diferencia, dando lugar a una variable V de valor real de mercado del capital instalado.

Tobin (1969) introdujo la magnitud q , definida como el ratio del "valor de bienes de capital o de derechos sobre los mismos" respecto a "su costo de reposición", lo que ha derivado en un concepto central en la teoría ortodoxa de inversión. La idea es que si este ratio excede la unidad, la empresa puede incrementar su valor de mercado a través de incrementar su stock de activos o recursos. De esta manera, debiéramos ver una firma invirtiendo cuando su ratio q es mayor a 1, y eventualmente abandonando o depreciando sus inversiones cuando es menor. Mas aún, podemos obtener una aproximación del q agregado de la economía a través de observar el valor de mercado de las firmas en una industria o en una economía, con respecto al costo de reposición de su capital. En la misma línea que para la firma en particular, debiéramos ver que el nivel agregado de inversión se encuentra positivamente relacionado al ratio q de la economía. Visto de esta manera, el numerador de q es el valor de mercado de los activos existentes:

$$V_t = q_t * K_{t-1} \quad (3)$$

La regla tradicional marshalliana de inversión plantea invertir si $V > K$ o lo que es similar, si $\Delta V > \Delta K = I$ ($q > 1$ conforme a (3)). Sin embargo, no deben dejarse de lado los argumentos planteados por Dixit y Pyndick (1994)¹³, donde se deben tener en cuenta consideraciones relativas a la existencia de incertidumbre en los valores V e irreversibilidad de las inversiones I conforme el desarrollo del anexo B. Conforme dicho

⁸ En línea con los modelos neoclásicos de crecimiento.

⁹ En Anexo A se puede observar la relación histórica de producto a stock de capital neto para la economía argentina queha tenido un promedio de 0.30 con una desviación estándar de 0.02 (bastante estable).

¹⁰ La variable inversión está definida como inversión bruta.

¹¹ En adelante omitiré este término lo que no afecta los resultados propuestos.

¹² Ver el capítulo 2 punto 5 de Obstfeld y Rogoff (1996).

¹³ El nivel de costo de oportunidad de la inversión no está dado solamente por la tasa r , sino que se agrega una extratasa por el costo de oportunidad del derecho de espera que se pierde al realizar la inversión.

desarrollo, los autores exponen que la inversión puede ser asimilada a una opción de compra que adquiere un valor $W(V)$ por la posibilidad de esperar, dada la incertidumbre y la potencial irreversibilidad, cuyo valor dependerá del valor V . Tomar una decisión de comprometer capital I implica eliminar el valor de la opción de espera y que debe ser añadido al costo de inversión o sustraído del valor del proyecto. Conforme lo expuesto anteriormente, la opción de espera genera un costo de oportunidad $W(V)$ que al ser añadido a la inversión provocará que mientras V fluctúa, habrá períodos de tiempo donde q bajo la medición convencional excede la unidad sin atraer inversiones, debido a aspectos relacionados a incertidumbre e irreversibilidad en las inversiones. La variable q entonces gatilla los procesos de inversión que tienden a modificar el stock de capital en el tiempo¹⁴ de manera que el nivel de capital y el proceso de inversión que lo modifica es una función del precio del capital de la forma¹⁵:

$$K = K(q) \tag{4}$$

donde

$$\frac{\partial K}{\partial q} = K' > 0 \tag{5}$$

Se define esta variable q como dependiente del nivel de producto real esperado de la economía¹⁶, de la forma:

$$q = q(Q^e)^{17} \tag{6}$$

donde Q^e representa el nivel de producto esperado. La función q posee las siguientes características:

$$\frac{\partial q}{\partial Q^e} = q' > 0 \tag{7}$$

y

$$\frac{\partial^2 q}{\partial Q^{e^2}} = q'' > 0 \tag{8}$$

¹⁴ En el anexo B se detallan las condiciones y los límites para los cuales las subas y bajas de la variable q se transforman de manera efectiva en procesos de inversiones o desinversiones respectivamente.

¹⁵ En anexo E se expone evidencia para la economía argentina de relación entre el precio de mercado de capital (medido por un proxy dado por el índice de acciones) y el proceso de inversión agregada.

¹⁶ El supuesto de trabajo (bastante lógico) es que un incremento del producto esperado hace necesario contar con un mayor stock de capital, y dado que el mismo no ajusta instantáneamente, ajusta el precio del stock actual hasta tanto la inversión permite alcanzar dicho nivel (ver Anexo A de evolución del stock de capital).

¹⁷ A los efectos prácticos, la relación entre el crecimiento y el valor del capital puede surgir conforme se observa en el anexo D a partir de considerar el valor presente de un flujo de fondos FF que crece a una tasa g constante y es descontado a una tasa k que refleja apropiadamente la clase de riesgo del capital. Este modelo frecuentemente utilizado a los efectos de la valuación de activos y permite proporcionar una relación inequívoca entre crecimiento y valor de los activos de la forma:

$$V = f(g)$$

de donde se pueden derivar condiciones bajo las cuales el valor esperado y la volatilidad de V estarán asociados al valor esperado y a la volatilidad de g .

Se define la dinámica de cambio de la variable Q^e a través del siguiente proceso de Brown:

$$dQ^e = \mu_g Q^e dt + \sigma_g Q^e dz \quad (9)$$

donde μ_g es la tasa de crecimiento esperada del output, σ_g refleja la volatilidad instantánea de dicha tasa de crecimiento y dz es el incremento en un proceso de Wiener

Se puede aproximar en sentido de "mean squares" la dinámica de q partir de la dinámica de Q^e aplicando sobre la ecuación (6) el lema de Ito, haciendo uso de (7) y (8):

$$dq = q' dQ + \frac{1}{2} q' \sigma_g^2 Q^{e2} dt \quad (10)$$

y si se reemplaza en dicha ecuación dQ^e por (9) se obtiene:

$$dq = q' (\mu_g Q^e dt + \sigma_g Q^e dz) + \frac{1}{2} q' \sigma_g^2 Q^{e2} dt \quad (11)$$

y reagrupando términos:

$$dq = (q' \mu_g Q^e + \frac{1}{2} q' \sigma_g^2 Q^{e2}) dt + q' \sigma_g Q^e dz \quad (12)$$

de donde se observa el drift del proceso para dq ,

$$\mu_q = (q' \mu_g Q^e + \frac{1}{2} q' \sigma_g^2 Q^{e2}) \quad (13)$$

y su desvío instantáneo

$$\sigma_q = q' \sigma_g Q^e \quad (14)$$

dando lugar al proceso dinámico

$$dq = \mu_q dt + \sigma_q dz \quad (15)$$

donde es extremadamente relevante el hecho que la variable aleatoria q tiene una tasa de volatilidad que se encuentra afectada de manera positiva por la volatilidad en la tasa de crecimiento esperada del producto de la economía conforme ecuación (14).

$$\sigma_q = f(\sigma_g) \quad (16)$$

con

$$\frac{\partial \sigma_q}{\partial \sigma_g} > 0 \quad (17)$$

A través de este desarrollo se observa un concepto extremadamente importante: la volatilidad en la tasa de crecimiento esperada de la economía afecta de manera positiva la volatilidad en el precio sombra del stock de capital¹⁸. Habiendo encontrado un proceso dinámico para la variable q_t , es válido proponer ahora un proceso para la variable V_t conforme la ecuación (3), donde diferenciando totalmente con respecto a q y haciendo caso omiso del subíndice t se tiene:

¹⁸ Se debe recordar que todos los resultados son válidos en el contexto de las aproximaciones de "mean squares" válidas bajo el uso del Lema de Ito.

$$dV = K dq + q K' dq \quad (18)$$

dividiendo en ambos lados por V, obtenemos:

$$\frac{dV}{V} = \left[\frac{K}{V} + q \frac{1}{V} K' \right] dq \quad (19)$$

y reemplazando $q = V/K$ de acuerdo a (3) tenemos:

$$\frac{dV}{V} = \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] dq \quad (20)$$

Intuitivamente la ecuación (20) dice que la tasa de cambio en el valor del stock de capital está compuesta por dos efectos: el efecto precio producto de cambios en las expectativas (efecto expuesto en el primer término) que podríamos definir como efecto de corto plazo o instantáneo; y el efecto cantidad o volumen (efecto expuesto en el segundo término del corchete) que representa un cambio en el stock del mismo a través de la inversión, y que se podría definir como un efecto de mediano o mas largo plazo.

Haciendo uso de la ecuación de dinámica (15) derivada para dq, y reemplazando, se obtiene:

$$\frac{dV}{V} = \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] \left[\left(q' \mu_{\sigma} Q^e + \frac{1}{2} q'' \sigma_{\sigma}^2 Q^{e2} \right) dt + q' \sigma_{\sigma} Q^e dz \right] \quad (20)$$

o de similar manera:

$$\frac{dV}{V} = \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] [\mu_q dt + \sigma_q dz] \quad (21)$$

de donde distribuyendo:

$$\frac{dV}{V} = \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] \mu_q dt + \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] \sigma_q dz \quad (22)$$

se observa que en el proceso dinámico de la variable V_t , el primer término es el drift del proceso estocástico para dicha variable, mientras que el segundo es la volatilidad de dicha variable:

$$\alpha = \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] \mu_q \quad (23)$$

y

$$\sigma = \left[\frac{1}{q} + \frac{K'}{K} \right] \sigma_q \quad (24)$$

de donde

$$\frac{dV}{V} = \alpha dt + \sigma dz \quad (25)$$

siendo el mismo el proceso estocástico del valor del stock de capital de la economía. Un punto extremadamente relevante en el desarrollo es que la volatilidad σ se encuentra de acuerdo a las ecuaciones (14) y (24) relacionada de manera positiva con la volatilidad en la tasa de crecimiento esperada de la economía, donde una mayor volatilidad conlleva una mayor volatilidad en el valor del stock de capital. Haciendo uso de estos resultados y conforme el enfoque de opciones reales aplicadas a decisiones de inversión de acuerdo a lo que se expone en el anexo B, una mayor volatilidad en el valor del stock de capital incrementa el valor de la opción de espera en la decisión de inversión, lo que lleva a que el precio del capital q deba alcanzar valores mas altos para gatillar decisiones de inversión (o valores mas bajos para procesos de desinversión), lo que retrasa las mismas ya que el valor óptimo de inversión V^* en una decisión de inversión (conforme a ecuaciones B.24 y B.25 en anexo B) se incrementa frente a la mayor volatilidad (dado el mayor valor de la opción de espera lo que implica un mayor). El resultado es que V (o alternativamente q) fluctúa (hacia arriba y abajo) en un rango mas amplio sin generar inversiones o desinversiones lo que afecta el proceso de formación de capital.

Este resultado del modelo es extremadamente relevante, ya que permite vincular la tasa de volatilidad en el producto a las decisiones de inversión en el agregado. De acuerdo a esto, recién cuando los precios sombra q del valor del stock de capital instalado suben lo suficiente, lo que de conforme a (6) debiera ser consistente con mayores tasas de crecimiento esperado de la economía, se gatillan los procesos de inversión que incrementan de manera consistente el stock de capital y por ende las posibilidades de producción. Las mayores tasas de volatilidad en el producto deben ser compensadas con mayores tasas de crecimiento esperado para cristalizarse en inversiones.

Economías que presentan grados de incertidumbre adicionales respecto de sus tasas de crecimiento debieran ver fluctuar mas los precios del stock de capital sin que dichas fluctuaciones se traduzcan efectivamente en decisiones de inversión en las mismas.

4 Análisis empírico de la relación entre la volatilidad en la tasa de crecimiento y la volatilidad en el precio de mercado del stock de capital

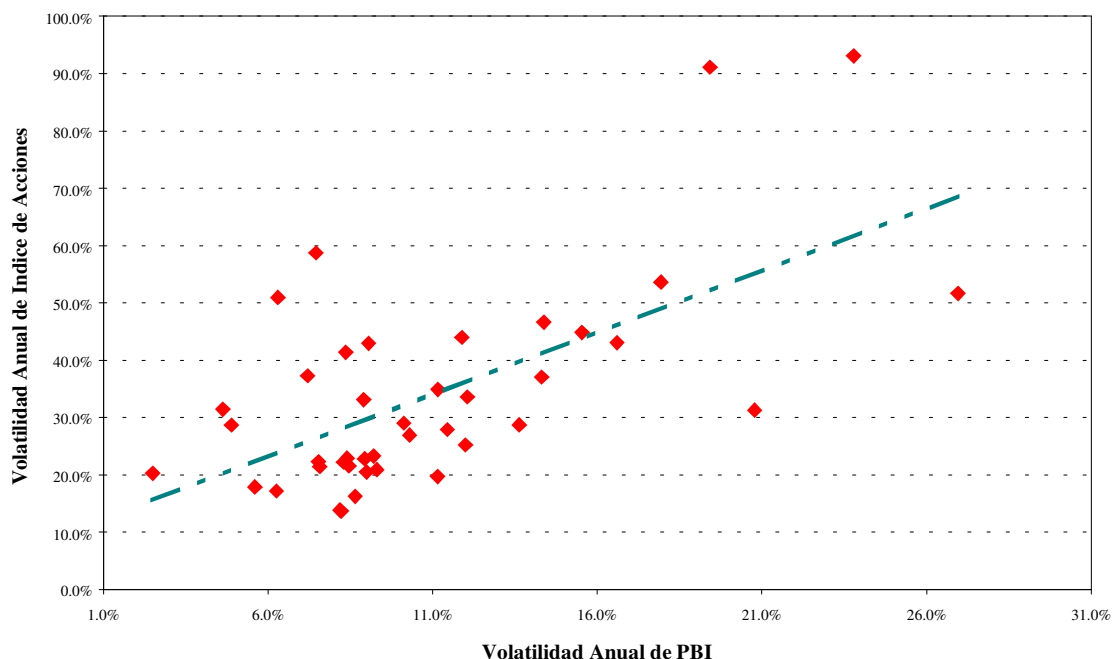
Conforme los resultados obtenidos en el punto 3, una mayor volatilidad en la tasa de crecimiento del producto debiera ser consistente con una mayor volatilidad en el precio del stock de capital., a partir de la relación dinámica en (22). El motivo del presente punto es evaluar este supuesto a la luz de evidencia en series de datos. A tales efectos, se toman series históricas desde 1992 a 2001 (se elige este período por la disponibilidad de datos, y porque en el caso argentino antecede a la crisis de fines de 2001) de datos de índice de precios de acciones (como proxy del valor del stock de capital¹⁹ de la base de datos Bloomberg)) y nivel de producto bruto interno (de la base de datos del Banco Mundial) medidos a fin de cada año y en dólares corrientes para un conjunto de 41 países (conforme el detalle que se expone en anexo C); con estos datos de nivel se procede a calcular la tasa de variación porcentual anual a través de la aplicación de la fórmula:

$$R_t = X_t - X_{t-1}/X_t \quad (26)$$

¹⁹ Es un proxy imperfecto del valor del stock de capital, pero es un precio que surge de mercados y que mejor permitiría aproximar dicho valor.

de cada una de las variables, obteniéndose una transformación de los datos anteriores desde 1993 a 2001. Se calcula la desviación estándar de la variable definida en (26) para las series de tasa de cambio de producto y tasa de retorno del índice para cada uno de los 41 países, obteniendo una serie de 41 pares ordenados de volatilidades. En el siguiente gráfico de dispersión se observan los datos donde se ha adicionado una recta de tendencia que permite observar una relación positiva entre ambas magnitudes. De dicha inspección visual surge una primera relación positiva entre la volatilidad del índice de acciones y la volatilidad en la tasa de crecimiento del PBI.

Gráfico 4 Relación entre volatilidades anuales de tasa de crecimiento de PBI y volatilidad de índice de precio de acciones (en U\$S corrientes 1993-2001)



A los efectos de chequear de manera rigurosa esta potencial relación positiva, se procede a correr una regresión entre la volatilidad de la variación en el precio del índice contra la volatilidad en la tasa de crecimiento del PBI de la forma²⁰:

$$\sigma_{\text{Retorno Índice}} = \alpha + \beta_1 \sigma_{\text{tasa PBI}} + \beta_2 D_{\text{G-7 / Europa}} + \varepsilon \quad (27)$$

donde el coeficiente β_1 representa el efecto de la volatilidad de la tasa de crecimiento del producto, y el coeficiente β_2 se encuentra asociado a una variable dicotómica que adopta un valor de 1 si la economía pertenece al grupo que denominaré A (de países industrializados y Europa, e incluyendo también a Australia y a Nueva Zelanda, pero exceptúa a Grecia) y de 0 si pertenece al grupo que denominaré B (América Latina, Asia o Resto del Mundo).

En la siguiente tabla se exponen los resultados:

²⁰ A los efectos de la definición correcta del modelo, se procedne a corre varias regresiones, incluyendo el tipo de cambio nominal para cada economía y también agrupando Latinoamérica de manera diferente a Asia, siendo en todos los intentos imposible rechazar al 95% la hipótesis nula que los coeficiente son iguales a cero.

Tabla 5 Modelo de Regresión por Mínimos Cuadrados Ordinarios

Variable	Coefficiente	t-Statistic	Prob.
Constante	0.21783	3.8363	0.0005
Tasa volatilidad PBI	1.80651	4.4372	0.0001
Dummy	-0.16576	-3.9133	0.0004
R cuadrado	0.59501		
R cuadrado ajustado	0.57369		
Observaciones: 41			
Test de White de Heterocedasticidad			
F-statistic Modelo Básico	4.388635	Probability	0.009703

donde de acuerdo al Test de White se rechaza la hipótesis nula de homocedasticidad, procediendo a corregir por una matriz de ponderación²¹ bajo el método de mínimos cuadrados ponderados y corriendo nuevamente la regresión (27) se obtienen los siguientes estadísticos:

Tabla 6 Modelo de Regresión por Mínimos Cuadrados Ponderados

Variable	Coefficiente	t-Statistic	Prob.
Constante	0.32618	8.07435	0.0000
Tasa volatilidad PBI	0.84182	2.33330	0.0250
Dummy	-0.19981	-6.20218	0.0000
Unweighted Statistics			
R cuadrado*	0.532452		
R cuadrado ajustado*	0.507844		
Observaciones: 41			
* unweighted statistics			
F-statistic Modelo Ponderado	1.044933	Probability	0.384133

donde de acuerdo al test de White no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de homocedasticidad (el modelo se encuentra corregido por heterocedasticidad). El R² se encuentra por encima de 50%, el coeficiente de tasa de volatilidad del producto es positivo y significativo al 5% mientras que la variable de distinción de economías es negativa y significativa al 1%, lo que permitiría confirmar la hipótesis de relación entre la volatilidad en tasa de retornos del índice de precio de acciones, y la volatilidad en la tasa de crecimiento del PBI de la forma:

$$\sigma_{\text{Retorno Índice}} = 0.32618 + 0.84182 \sigma_{\text{tasa PBI}} - 0.19981 D_{\text{G-7 / Europa}} + e \quad (28)$$

De acuerdo a (28), la volatilidad en el producto es significativa para explicar la volatilidad en el precio del agregado de acciones que se cotizan públicamente en cada uno de las economías evaluadas y por el período considerado, mientras el hecho de hacer una distinción entre economías en grupo A y grupo B en cuanto a volatilidades del precio de acciones en el agregado prueba ser significativo, con una menor volatilidad en aquellas economías incluidas en el grupo A. Conforme el procesamiento

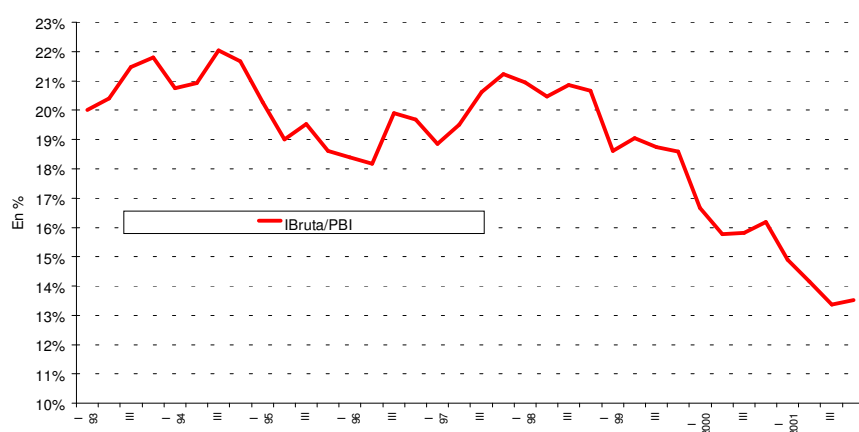
²¹ Para realizar el cálculo por mínimos cuadrados ponderados se estimó la matriz de covarianzas como una función del valor pronosticado para la variable dependiente de la forma $\text{varianza} = \text{constante} + \text{valor pronosticado de la variable dependiente} + \text{valor pronosticado de la variable dependiente elevado al cuadrado}$.

de los datos y la evidencia obtenida, existe un fundamento empírico a una potencial relación positiva entre la dispersión de los retornos en el precio del stock de capital agregado, y la dispersión de la tasa de crecimiento del PBI, lo que le da soporte a los resultados conceptuales y al modelo derivado en el punto anterior²².

5 Relación entre la tasa de retorno del índice de precios de acciones y la tasa de cambio en la inversión agregada para el período 1993-2001

Del punto anterior se desprende una relación entre la volatilidad de la tasa de retorno del PBI y del precio de un índice de acciones. Conforme los resultados derivados en el Anexo D, la volatilidad en la tasa de crecimiento puede influir en la volatilidad en el valor de los activos, y en base a los resultados expuestos en el Anexo B, tomando la decisión de inversión desde el enfoque de opciones reales como el ejercicio de un derecho, mientras mas volátil sea el valor del activo subyacente, menor será el nivel de inversión agregada en dicha economía debido al mayor valor de la opción de espera asociada. El siguiente gráfico muestra la serie temporal de variación en la relación de inversión (IBIF) a producto para la economía argentina en el período 1993-2001

Gráfico 5 Inversión bruta como porcentual del producto de la economía argentina

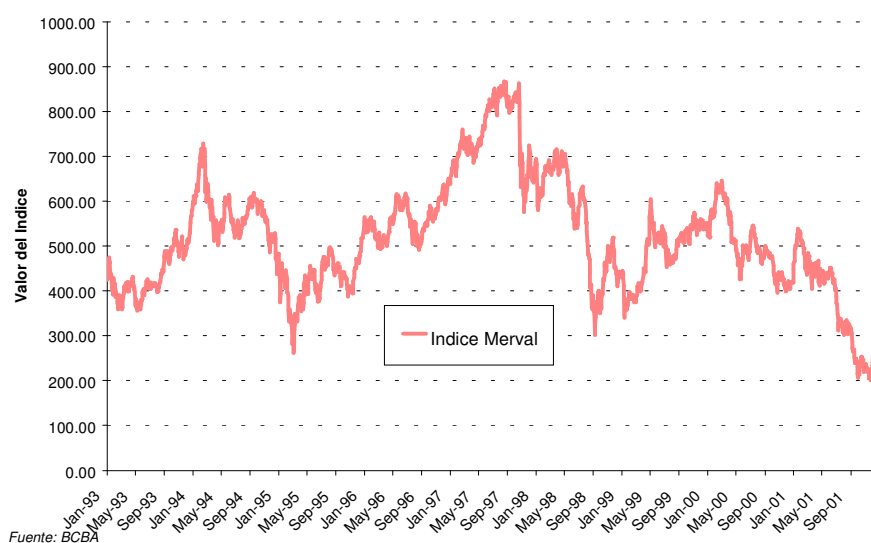


Fuente: CEA en base a datos INDEC y Mecon

donde se observa la caída como consecuencia de la recesión iniciada en 1998. En este contexto influye el impacto de la tasa de crecimiento esperada en el valor corriente de los activos. A continuación se expone la evolución diaria del índice de precios de acciones (MERVAL) para el mismo período:

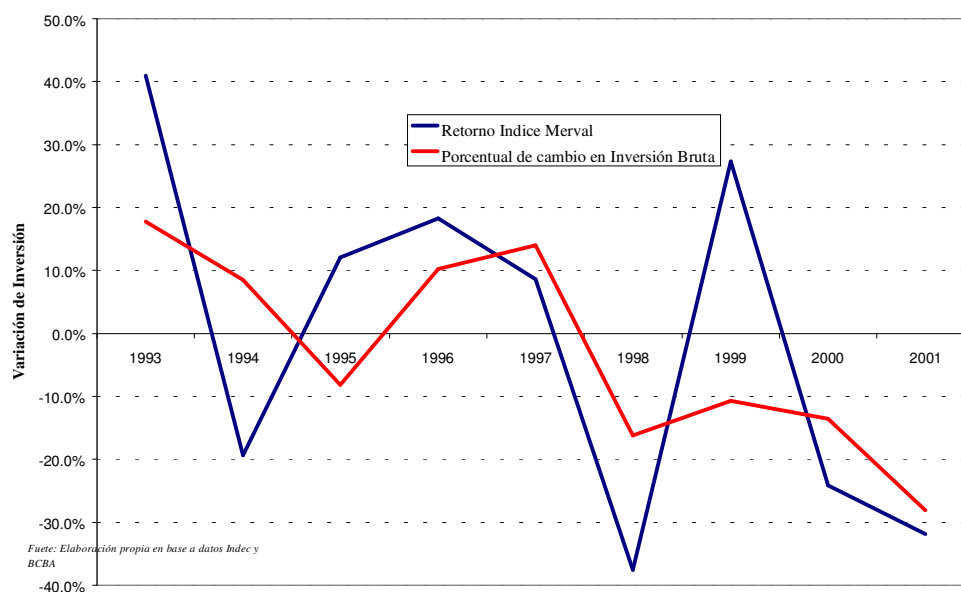
²² No se debe perder de vista que los datos se encuentran medidos en dólares corrientes, lo que puede conllevar alguna implicancia respecto al impacto del tipo de cambio, mas inestable en economías emergentes, por ello el análisis pendiente a futuro estaría dado por medición de volatilidad en la tasa de crecimiento real (sobre la cual obran datos en este capítulo, y medición de volatilidad del índice de acciones en términos reales (deflactado por índice de precios) para eliminar potenciales efectos de tipo de cambio, a pesar que en el presente modelo se ha testeado como no significativa la variable tipo de cambio nominal. Sin embargo, corriendo la regresión de volatilidad del retorno del índice (en dólares corrientes) contra volatilidad en la tasa de crecimiento REAL, el coeficiente es significativo y positivo. Otra nota de precaución esta dada por la liquidez; no se esta utilizando ninguna variable (salvo la distinción entre economía en desarrollo y economía desarrollada) que ajuste de manera adicional por la liquidez del mercado de acciones, ni tampoco por grado de desarrollo relativo de cada mercado.

Gráfico 6 Evolución diaria del índice Merval 1993-2001



En el siguiente gráfico se exponen datos anuales de las tasas de cambio índice de precios de acciones (Merval) y de la variación porcentual anual de la inversión bruta (IBIF) para el período 1993-2001:

Gráfico 7 Cambios anuales porcentuales índice Merval e IBIF



donde en la inspección visual permite observar una relación entre el precio del índice y el nivel de inversión agregada expresada de manera relativa al PBI. Corriendo la regresión de la tasa de cambio de la inversión con respecto al retorno del índice, se obtienen los siguiente resultados

Tabla 7

Estadísticos de regresión			
Multiple R	0.614		
R cuadrado	0.377		
R cuadrado ajustado	0.252		
Observaciones	9		

		t Stat	P-value
Intersección	0	#N/A	#N/A
Coefficiente	0.364	2.309	4.98%

siendo el coeficiente significativo al 5%, lo que evidencia un movimiento conjunto entre el índice y la inversión, que permite entender mejor la relación planteada entre tasa de crecimiento del PBI, valor de los activos, volatilidad e impacto de ambas variables en la inversión agregada.

6 Conclusiones

En el presente trabajo he tenido oportunidad de exponer evidencia sobre parámetros estadísticos (mas específicamente volatilidad) de la tasa de crecimiento histórica del producto real para diferentes economías. De dicha observación surge la existencia de patrones de mayor volatilidad en dicha tasa para grupos de economías, no totalmente consistentes con mayores tasas de crecimiento promedios. Entre dichas economías se encuentra la Argentina, con valores significativamente altos de manera histórica de dicha variable. Esta evidencia conlleva consideraciones respecto del proceso de formación de capital y de inversiones. A los efectos del análisis desarrollo un modelo estilizado de interacción entre la volatilidad en la tasa de crecimiento esperada y tasa de volatilidad en el precio del stock de capital donde dicha relación surge como positiva. Esto implica que mayores niveles de volatilidad en la tasa de crecimiento esperada (utilizando como proxy la tasa histórica) serían consistentes con mayores niveles de volatilidad en el precio del stock de capital. De dicho desarrollo surgen consideraciones respecto de la decisión en el agregado de incremento de capital o inversiones. Esta decisión puede ser enfocada (desde una analogía de opciones financieras) como la valuación de una opción de espera cuya equivalente financiera es la opción de compra; en dicho contexto un mayor nivel de volatilidad en el valor del capital subyacente lleva a que el valor de la opción de espera en las inversiones sea mas alto, lo que resulta en que el valor de mercado del capital V (o alternativamente su precio q) fluctúa en un rango mas amplio sin generar inversiones o desinversiones lo que afecta el proceso de formación de capital. La implicancia acerca que mayores niveles de volatilidades en el producto serían consistentes con una mayor volatilidad en el valor del stock de capital es testeada utilizando como proxy de valor del capital para cada economía el que surge de un índice representativo de acciones. Del test se encuentra evidencia que tanto la tasa de crecimiento del producto como el hecho de ser una economía desarrollada (o estar cerca de las mismas) ayudan a explicar la volatilidad en el precio de mercado de índices de acciones. La existencia de este efecto de volatilidad tiene connotaciones bastante significativas respecto del nivel de inversión que atrae la economía, originada no solo por la tasa esperada de crecimiento y su impacto en el valor de los activos, sino también por la volatilidad que posee dicha tasa y en lo que de ello se desprende en cuanto a que mayores niveles de volatilidad en la tasa de crecimiento en el producto derivan en mayor nivel de volatilidad en el

precio o valor de los activos de dicha economía, lo que a su vez incrementan el valor de la opción de espera asociada a la inversión en dichos activos, reduciendo en consecuencia el nivel de inversión agregada y por extensión el stock de capital agregado, y en definitiva impactando sobre las oportunidades de crecimiento de una economía.

Referencias

Black F., y Scholes M. (1973), ' ' The Pricing of Options and Corporate Liabilities' ' . *Journal of Political Economy* 81 (May-June): 637-659.

Brealey R. y Myers S. (1996). *Principles of Corporate Finance*. Mc Graw Hill.

Caballero R. (2000b), "Macroeconomic Volatility in Latinamerica: A View and Three Cases Studies ", NBER working paper.

Caballero R. y Krishnamurty A. (1998), "Emerging Market Crises: an Asset Market Perspective", NBER Working paper.

Caballero R. y Krishnamurty A. (2001), "International and Domestic Collateral Constraints in a Model of Emerging Market Crises", *Journal of Monetary Economics* 48 (3) 513-548.

Calvo G. (1996), "Varieties of Capital Market Crises", en *The Debt Burden and its Consequences for Monetary Policy*, International Economic Association, Macmillan.

Calvo G. (1998), "Capital Flows and Capital Market Crises", *Journal of Applied Economics* 1 (1) 35-54.

Calvo G. (1999), "Contagion in Emerging markets: when Wall Street is a carrier", *mimeo*, University of Maryland.

Cox J., Ross, S., y Rubinstein M. (1979), ' ' Option pricing: A simplified approach' ' . *Journal of Financial Economics* 7, no. 3:229-263

Dapena, J. (2004), "Absorción de shocks en economías volátiles: ahorro a través de acciones en el mercado de capitales - el caso argentino 1993 -2001" *Documento de Trabajo* 257 Universidad del CEMA.

Dixit A. y Pindyck R. S. (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, N.J.

Hirschleifer J. (1958), "On the Theory of Optimal Investment Decision", *Journal of Political Economy* 66: 329-352.

Ingersoll J. (1987), *Theory of Financial Decision Making, Studies in Financial Economics*. Rowman & Littlefield Publishers inc.

Mc Donald R. y Siegel D. (1984), ' ' Option Pricing When the Underlying Asset Earns a Below-Equilibrium Rate of Return: A Note' ' *Journal of Finance* (March), 261-265

Mc Donald R. y Siegel D. (1985), ' ' Investment and the Valuation of Firms When there is an Option to Shut Dow' ' *International Economic Review* 26 (June), 331-349

Mc Donald R. y Siegel D. (1986), ' ' The Value of Waiting to Invest' ' *Quarterly Journal of Economics* (November) 101, 707-728

Merton R. C. (1973), ' ' Theory of Rational Option Pricing' ' *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, no. 1: 141-183.

Neftci S. (1996), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press.

Obstfeld M. y Rogoff K. (1996), *Foundations of International Macroeconomics*, The MIT Press

Rajan R. y Zingales L. (1998), "Financial Dependence and Growth", *American Economic Review* 88 (3):559-586.

Ridditz C. (2003), "Liquidity Needs and Vulnerability to Financial Underdevelopment", *mimeo* MIT.

Sachs J. y Larraín F. (1994) *Macroeconomía en la Economía Global*. Prentice Hall Latinoamericana.

Stiglitz J. y Weiss A. (1981), "Credit Rationing in Markets with Imperfect Information", *American Economic Review* 71 (3): 393-410.

Tobin J. (1969), "A General Equilibrium Approach to Monetary Theory". *Journal of Money, Credit and Banking* 1 (Febrero): 15-29.

Trigeorgis L. (1988), ' ' A Conceptual Options Framework for Capital Budgeting' ' . *Advances in Futures and Options Research* 3:145-167.

Datos

Bloomberg (www.bloomberg.com)

Base de Datos IMF (CD)

Base de Datos del Banco Mundial

Anexo A - Detalle de relación entre PBI real y stock de capital para la economía argentina

	PBI Real	Capital Real	Relacion PBI/Capital		PBI Real	Capital Real	Relacion PBI/Capital
1960	104.222	370.730	0.28	1982	190.631	746.864	0.26
1961	111.624	386.478	0.29	1983	198.644	751.477	0.26
1962	109.853	396.811	0.28	1984	202.348	754.282	0.27
1963	107.249	402.791	0.27	1985	190.414	751.822	0.25
1964	118.295	411.575	0.29	1986	202.331	753.580	0.27
1965	129.135	421.002	0.31	1987	206.932	759.741	0.27
1966	129.969	430.022	0.30	1988	203.954	764.877	0.27
1967	133.407	440.243	0.30	1989	191.167	761.522	0.25
1968	139.141	454.487	0.31	1990	187.064	753.638	0.25
1969	151.021	474.952	0.32	1991	205.126	752.932	0.27
1970	159.144	496.661	0.32	1992	223.743	760.331	0.29
1971	165.129	520.989	0.32	1993	236.505	771.708	0.31
1972	168.560	544.683	0.31	1994	250.308	788.205	0.32
1973	174.872	564.440	0.31	1995	243.186	796.299	0.31
1974	184.325	585.490	0.31	1996	256.626	808.038	0.32
1975	183.233	604.875	0.30	1997	277.441	827.530	0.34
1976	183.209	630.095	0.29	1998	288.123	848.892	0.34
1977	194.908	663.687	0.29	1999	278.369	860.608	0.32
1978	188.629	685.728	0.28	2000	276.173	867.928	0.32
1979	201.865	709.734	0.28	2001	236.997	867.411	0.27
1980	204.952	731.617	0.28	2002	235.236	852.704	0.28
1981	195.487	743.446	0.26				
				Promedio General			0.29
				Desvío Estándar			0.02

Fuente: Mecon (elaborado a \$ corrientes de 1993)

Anexo B - La inversion como un derecho de compra

B.1 Consideraciones útiles

Conforme el desarrollo de Dixit y Pindyck (1994), la regla tradicional marshalliana de inversión de invertir si el valor presente V del flujo de fondos descontado generados por un activo es mayor al costo de la inversión I no es aplicable con incertidumbre e irreversibilidad, al no tener en cuenta el costo de la opción de espera que se elimina al realizar la inversión. Esta opción surge del hecho que la inversión puede implicar hundir capital I para obtener el valor presente V que representa una variable aleatoria, que puede tener posteriores realizaciones por debajo de I . El nivel de costo de oportunidad de la inversión no está dado solamente por la tasa r , sino que se agrega una extratasa por el costo de oportunidad del derecho de espera que se pierde al realizar la inversión. Trabajando sobre la tasa y las formulas; obtenemos que la tasa relevante es:

$$r + \frac{1}{2} \sigma^2 \beta \quad (B.1)$$

siendo el segundo término lo que los autores asocian al costo de oportunidad de la liquidación de la opción de espera. Como podemos ver, cuando no existe

incertidumbre, ($\sigma = 0$) la tasa relevante de corte en el proyecto pasa a ser r nuevamente, como en la teoría neoclásica de inversión. Este segundo término podría ser pensado como sugieren los autores como una corrección al modelo neoclásico. Tobin (1969) introdujo la magnitud q , definida como el ratio del "valor de bienes de capital o de derechos sobre los mismos" a "su costo de reposición", lo que ha derivado en un concepto central en la teoría ortodoxa de inversión. La idea es que si este ratio excede la unidad, la empresa puede incrementar su valor de mercado a través de incrementar su stock de activos o recursos. De esta manera, se debiera ver una firma invirtiendo cuando su ratio q es mayor a 1, pero no cuando es menor. Mas aún, se puede obtener una aproximación del q agregado de la economía a través de observar el valor de mercado de las firmas en una industria o en una economía, con respecto al costo de reposición de su capital. En la misma línea que para la firma en particular, se debiera ver que el nivel agregado de inversión se encuentra positivamente relacionado al ratio q de la economía. Visto de esta manera, el numerado de q es el valor de los activos existentes, mientras que en los proyectos de inversión lo que debiera ser relevante para el inversor (sea individuo o empresa) es el efecto del *siguiente* proyecto. Conforme lo expuesto anteriormente, la opción de espera genera un costo de oportunidad $W(V)$ que debe ser añadido a la inversión u sustraído del valor del proyecto. Por consiguiente, cuando un proyecto de valor V se inicia, el valor de la firma se debiera incrementar en $V - W(V)$, dado que se resigna el valor de la opción $W(V)$. Esta situación es consistente con un ratio de $q = 1$ como parámetro. Pero se hace difícil asignar la parte del incremento de valor en la firma que deviene de incrementos marginales de capital; por ello q se ha medido como el ratio del valor presente del flujo de fondos asociado al proyecto con respecto a su costos de instalación o construcción (inversión I). En este entorno, $q=V/I$. Pero como se expondrá mas abajo, se puede expresar el criterio correcto de inversión según lo expuesto a través del q^* relevante que justifica la inversión, dado por:

$$q^* = \beta / (\beta - 1) > 1 \quad (B.2)$$

Mientras V fluctúa, habrá períodos de tiempo donde q bajo la medición convencional excede la unidad sin atraer inversiones, debido a aspectos relacionados a incertidumbre e irreversibilidad en las inversiones.

B.2 El modelo

Desarrollando sobre la exposición de Dixit y Pindyck (1994), el punto de partida es el modelo desarrollado por McDonald y Siegel (1986), al considerar el siguiente problema: en que punto es óptimo realizar una inversión irreversible I para obtener a cambio un proyecto cuyo valor de flujo de fondos descontado es V , dado que V posee una dinámica de acuerdo al proceso geométrico:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (B.3)$$

donde dz es el incremento en un proceso de Wiener. La ecuación (B.3) implica que el valor presente del proyecto es conocido, pero los valores futuros se distribuyen lognormalmente con varianza proporcional al tiempo. De esta manera no obstante la información arriba a través del tiempo (el inversor observa el cambio en el valor V), el valor futuro del proyecto es *siempre* incierto. La ecuación anterior es una abstracción de la realidad pero con el objetivo de presentar de mejor manera las técnicas y resultados y para simplificar el modelo para su análisis, suponemos que esa es la dinámica adecuada. Se puede advertir que la oportunidad para el inversor es equivalente a un derecho de compra (call option) perpetuo- el derecho pero no la obligación de adquirir un flujo de fondos derivado de un proyecto de inversión previo pago de un costo pre- especificado I que en este caso representa la inversión. En consecuencia, la decisión de inversión es equivalente a encontrar el timing óptimo de

ejercicio de la opción. Así, la decisión de inversión puede ser vista como un problema de valuación de opciones.

En lo que resta, se denotará el valor de la oportunidad de inversión en el proyecto por $W(V)$, y se derivarán reglas que maximizan este valor. El payoff de invertir en t es igual a $V_t - I$, de manera que el objetivo es maximizar su valor presente esperado bajo mercados completos con valuación neutral al riesgo:

$$W(V) = \max \varepsilon ((V_T - I)e^{-\rho T}) \quad (B.4)$$

donde ε representa el operador esperanza, T es momento futuro (desconocido) en el que la inversión es realizada, ρ es la tasa de descuento relevante y la maximización se encuentra sujeta a la dinámica de la ecuación (B.3). Para que el problema tenga sentido, se asume que $\alpha < \rho$; de otra manera la integral de la ecuación (B.4) se puede hacer crecer indefinidamente a través de hacer crecer indefinidamente T . De esta manera, la estrategia de esperar siempre será la óptima dado que la misma no conlleva costos de oportunidad pero tiene el beneficio del crecimiento esperado de V ; y el óptimo no existiría. Denotaremos δ la diferencia $\rho - \alpha$; en consecuencia se asume que $\delta > 0$.

B.2.1 El caso determinístico

No obstante es la intención exponer la manera que la incertidumbre afecta las decisiones de iniciar proyectos de inversión, es útil examinar inicialmente el caso donde no existe incertidumbre, es decir $\sigma = 0$ en la ecuación (B.3). Como se verá, aún así puede haber valor de esperar.

Si $\sigma = 0$, $V(t) = V_0 e^{\alpha t}$, donde $V_0 = V(0)$. De esta manera, dado un valor corriente de V , el valor de la oportunidad de inversión asumiendo que se invierte en un momento futuro arbitrario T es:

$$W(V) = (V e^{\alpha T} - I) e^{-\rho T} \quad (B.5)$$

Si $\alpha \leq 0$, entonces $V(t)$ va a permanecer constante en el tiempo o caer, de manera que es claramente óptimo invertir inmediatamente si $V > I$, o no invertir nunca de otra manera. Entonces,

$$W(V) = \max (V - I, 0) \quad (B.6)$$

Que pasa cuando $0 < \alpha < \rho$? Entonces $W(V) > 0$ aún en el caso que $V < I$, dado que eventualmente V excederá a I en algún momento del tiempo. Mas aún, si actualmente $V > I$, podría ser mejor esperar antes que invertir ahora. Para ver esto, siguiendo la exposición de Dixit y Pindyck (1994), se maximiza $W(V)$ en la ecuación (B.5) con respecto a T . La condición de primer orden es:

$$\frac{dW(V)}{dT} = -(\rho - \alpha) V e^{-(\rho - \alpha)T} + \rho I e^{-\rho T} = 0, \quad (B.7)$$

que implica (se puede verificar fácilmente que la condición de segundo orden para la maximización es satisfecha si $\alpha > 0$, lo cual se verifica en el presente caso):

$$T^* = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{\rho I}{(\rho - \alpha) V} \right], 0 \right\} \quad (B.8)$$

Nótese que si V es no muy grande con respecto a I , será el caso donde conviene esperar y $T^* > 0$. La razón para demorar esta inversión en este caso es que en valores presentes, el costo de la inversión decae por un factor $e^{-\rho T}$, mientras que el payoff o valor de la inversión se reduce por el menor factor de descuento $e^{-(\rho-\alpha)T}$. Para que valores sería óptimo invertir inmediatamente? Es fácil de averiguar, dado que invertir inmediatamente es igual a provocar $T^*=0$, de donde observamos que el inversor debiera invertir inmediatamente si $V \geq V^*$ donde

$$V^* = \frac{\rho}{\rho - \alpha} I \geq I \quad (B.9)$$

Finalmente, sustituyendo la expresión (8) en la ecuación (7), se obtiene la siguiente solución en contextos ciertos para el valor de la oportunidad de inversión:

$$W(V) = \begin{cases} (\alpha I / (\rho - \alpha)) ((\rho - \alpha) V / \rho I)^{1/\alpha} & \text{para } V \leq V^* & (B.10a) \\ V - I & \text{para } V > V^* & (B.10b) \end{cases}$$

B.2.2 El caso estocástico

Se expone ahora el caso donde $\sigma > 0$. El problema ahora es determinar el punto donde es óptimo invertir I en retorno de un activo valuado en V . Dado que V tiene una evolución estocástica, no nos será posible determinar un momento T donde es óptimo realizar la inversión como hiciésemos en el caso determinístico. En su lugar, la regla de inversión óptima tomará un valor crítico V^* de manera que es óptimo invertir una vez que $V \geq V^*$. Como se verá, un mayor valor de σ resultará en un mayor valor de V^* , esto es un mayor valor de esperar. Es importante tener en cuenta que tanto el crecimiento esperado ($\alpha > 0$) y la incertidumbre ($\sigma > 0$) pueden crear valor de opción de espera y en consecuencia afectar el timing de la inversión. Para poder desarrollar la valuación a través de la replicación de portafolios de arbitraje requiere del supuesto que los cambios estocásticos en la variable V deben ser susceptibles de ser replicados por combinaciones de activos existentes en el mercado de manera tal que el retorno de estas combinaciones de activos se encuentra perfectamente correlacionado con el retorno del proyecto. Esto es equivalente a decir que el mercado es lo suficientemente completo tal que las decisiones de inversión no afectan el set de oportunidades existentes para los inversores. Este supuesto es bastante fuerte dado que en muchos casos un proyecto de inversión en activos reales como los que se están analizando puede tener resultados difíciles de predecir, y en consecuencia no estar relacionado a oportunidades existentes). Si este supuesto se verifica, se puede determinar la regla de inversión que maximiza el valor del proyecto sin tener que hacer ningún supuesto sobre las preferencias respecto al riesgo de los inversores o la tasa de descuento.

La dinámica de cambio de la variable V se mantiene conforme a (B.3) y se supone al igual que en el caso determinístico, que α (la tasa esperada de cambio del valor del proyecto V) es menor que la tasa ajustada de descuento μ (si no fuese así, el inversor estaría siempre mejor manteniendo la opción "viva", es decir no invirtiendo y dejando pasar el tiempo; mas adelante desarrollaremos sobre este punto). Dicha tasa μ proviene del supuesto hecho con respecto a mercados completos, donde existe un set de activos X que genera retornos perfectamente correlacionados con lo del proyecto de inversión V ,

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz \quad (B.11)$$

donde el drift μ es el retorno instantáneo esperado de poseer el set de activos X, que de acuerdo al modelo CAPM debiera reflejar el riesgo no diversificable de la economía (o sistemático):

$$\mu = r + \phi \rho_{xm} \sigma \quad (B.12)$$

r es la tasa libre de riesgo, ϕ es el precio de mercado del riesgo y ρ_{xm} es la correlación entre el retorno generado por X y el del mercado en su conjunto. De esta manera, μ es el retorno ajustado por riesgo que los inversores solicitarían en equilibrio para comprar un activo o invertir en un proyecto en la clase de riesgo de X que se encuentra en similar clase de riesgo que V.

Se denota entonces $\delta = \mu - \alpha$, donde se asume que $\delta > 0$. Este parámetro juega un rol muy importante en los modelos de opciones reales. En opciones financieras representa los dividendos distribuidos por la empresa, que reducen el valor de la opción de compra de las acciones, al reducir el valor del activo subyacente, yendo los dividendos para los accionistas y no para los tenedores de opciones sobre acciones. Este es el costo de oportunidad de las opciones financieras de compra, los dividendos que se pierden sus poseedores por no ejercer las mismas. De no existir costos de oportunidad en términos de dividendos perdidos, un call americano tiene el mismo valor que un call europeo, dado que nunca es óptimo ejercer el call americano antes de su vencimiento. En terminología de opciones reales, esto es equivalente a decir que siempre conviene esperar hasta el final sin ejercer la oportunidad de inversión, manteniendo la opción "viva" en lugar de "matarla" ejerciendo e invirtiendo. El supuesto que $\delta > 0$ implica que existe un costo de oportunidad por esperar ("dividendos perdidos") proporcional al valor V, tal que cuando V es lo suficientemente alto, el costo de oportunidad de esperar iguala e inclusive sobrepasa el beneficio de esperar y provoca que la inversión sea efectuada (e.g. que la opción sea ejercida). Este costo de oportunidad de esperar se puede asimilar a la pérdida de ingresos por no explotar la renta de un mercado, el costo de oportunidad de haber invertido recursos en un activo que da lugar a opciones pero que se mantiene inmovilizado, etc. Mientras mas alto sea este costo de oportunidad, menos valdrá la opción y mas incentivos tendrá el inversor para llevar adelante su proyecto de inversión de manera inmediata.

A continuación se desarrolla la solución de valuación de la opción de inversión $W(V)$ en base a la dinámica y supuestos expuestos. Como es usual en análisis de derechos contingentes, la solución de valuación se obtiene por argumentos de arbitraje. Se construye un portafolio se ϕ donde se mantiene la opción de inversión que posee un valor de $W(V)$ y se venden $n = W'(V)$ unidades del proyecto de inversión (o equivalentemente, del activo cuyos retornos están perfectamente correlacionados con los del proyecto de inversión). El valor de este portafolio es $\phi = W - W'(V)V$. Se debe notar que el retorno de este portafolio es dinámico, mientras V cambia, $W'(V)$ puede cambiar de un período corto de tiempo al siguiente, de manera que la composición del portafolio debe ser reajustada (lo que se denomina "hedging" dinámico). No obstante se mantiene n fijo en un período de tiempo corto dt. La posición "vendida" del activo V requerirá de un pago o outflow de $\delta V W'(V)$ durante el período de tiempo dt para que un inversor tenga incentivos a comprar esta posición. El inversor que posee una posición comprada en el activo recibe μV por unidad de tiempo, que incluye la tasa de apreciación αV mas el dividendo δV ; dado que la posición corta en el proyecto incluye $W'(V)$ unidades del proyecto, se deben pagar los "dividendos" equivalentes $\delta V W'(V)$. Tomando este pago en consideración, el retorno total de poseer el portafolio ϕ por un período corto de tiempo dt es

$$d\phi = dW - W'(V) dV - \delta W'(V) V dt \quad (B.13)$$

donde para obtener una expresión para dW , se hace uso del Lema de Ito:

$$dW = W'(V)dV + \frac{1}{2}W''(V)dt \quad (B.14)$$

de manera que el retorno total del portafolio es

$$d\phi = W'(V)dV + \frac{1}{2}W''(V)dt - \delta W'(V)V dt \quad (B.15)$$

simplificando el primer y cuarto términos del lado derecho de (B.15) se obtiene que el retorno del portafolio es:

$$d\phi = \frac{1}{2}W''(V)dt - \delta W'(V)V dt \quad (B.16)$$

Nótese que a través de la elección de n se ha constituido una posición que es completamente libre de riesgo (al desaparecer el término asociado a la incertidumbre en B.16), por lo que el retorno del portafolio es libre de riesgo. En consecuencia, para eliminar oportunidades de arbitraje, debe ser igual a $r\phi dt = r(W - W'(V)V)dt$:

$$r\phi dt = r(W - W'(V)V)dt = \frac{1}{2}W''(V)\sigma^2 V^2 dt - \delta V W'(V)dt \quad (B.17)$$

dividiendo por dt y reagrupando da la siguiente ecuación diferencial que $W(V)$ debe satisfacer:

$$\frac{1}{2}W''(V)\sigma^2 V^2 + (r - \delta)V W'(V) - rW = 0 \quad (B.18)$$

donde se aplican las siguientes condiciones de límite para derivar la solución.

$$W(0) = 0 \quad (B.19a)$$

$$W(V^*) = V^* - I \quad (B.19b)$$

$$W'(V^*) = 1 \quad (B.19c)$$

La primera condición surge del hecho que si el payoff asociado a la inversión se hace nulo, permanecerá en cero (es una implicancia del proceso dinámico de la ecuación B.3) eliminando cualquier posibilidad de rebote (y en consecuencia eliminando cualquier valor de opción asociada).

La segunda condición se da en llamar de "value matching"; dice solamente que en el momento óptimo de la inversión, el inversor elimina toda valor de opción y su payoff es el que surge de la diferencia entre el valor del activo que adquiere y el costo de obtenerlo.

Finalmente, la última condición es conocida como "smooth pasting" o "high contact", que asegura que no solo los valores de la opción y del payoff del inmediato ejercicio del proyecto se igualan en V^* , sino que sus derivadas también, lo que asegura la continuidad de la función de valor en ese punto (si $W(V)$ no fuese continua y suave en el punto V^* , un inversor podría maximizar el valor en un punto V diferente). Nótese que la ecuación (B.18) es de segundo orden, pero con tres condiciones de límite que deben ser satisfechas; esto es así, porque no obstante la posición de la primera condición de límite es conocida ($V = 0$), la posición de la segunda condición de límite no lo es; en otras palabras, el límite "libre" V^* debe ser determinado como parte de la solución. Esto hace necesario una tercera condición.

La segunda condición de límite tiene otra interpretación útil si se reescribe $V^* - W(V^*) = I$. Cuando el inversor invierte, obtiene la diferencia $V - I$, pero al mismo tiempo liquida la opción de espera, que se encuentra valuada por $W(V)$. Entonces, su ganancia, neta de su costo de oportunidad, es $V - W(V)$. El valor crítico V^* es donde esta ganancia se iguala con el costo directo o tangible de inversión I . Equivalentemente, se puede

escribir la ecuación como $V^* = I + W(V^*)$, haciendo el valor del proyecto igual a su costo "full" (directo más costos de oportunidad) de llevar adelante el proyecto de inversión. Para encontrar $W(V)$, se debe resolver la ecuación (B.18) sujeta a las condiciones de límite (B.19). La solución es simple: se puede adivinar una forma funcional, y determinar en que medida funciona a través de sustituirla en la ecuación. Para satisfacer la primera condición de límite la solución debe ser de la forma

$$W(V) = A V^\beta \quad (B.20)$$

donde A es una constante a determinar, y $\beta > 0$ es una constante conocida cuyo valor depende de los parámetros $r, \delta, \alpha, \sigma$. Las condiciones de límite restantes se pueden utilizar para obtener las dos variables desconocidas restantes, A y el valor crítico V^* al cual es óptimo invertir. Sustituyendo y reagrupando, se obtiene que:

$$V^* = I \beta / (\beta - 1) > I \quad (B.21)$$

que dividiendo por Y permite obtener el resultado de (B.2), y:

$$A = (V^* - I) / (V^*)^\beta = (\beta - 1)^{\beta - 1} / ((\beta)^\beta I^{\beta - 1}) \quad (B.22)$$

La solución para $W(V)$ y V^* puede ser expresada entonces como:

$$W(V) = \begin{cases} (I/(\beta-1))^{1-\beta} (1/\beta)^\beta V^\beta & \text{para } V < V^* \\ V - I & \text{para } V \geq V^* \end{cases} \quad \begin{matrix} (B.23a) \\ (B.23b) \end{matrix}$$

donde

$$V^* = I \beta / (\beta - 1) > I \quad (B.24)$$

y

$$\beta = \frac{-(r - \delta - \sigma^2 / 2) + \sqrt{(r - \delta - \sigma^2 / 2)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} > 1 \quad (B.25)$$

y donde $\delta > 0$ para asegurar convergencia.

Se observa entonces que dado que $\beta > 1$, $\beta / (\beta - 1) > 1$, de donde la regla simple de invertir cuando $V > I$ es incorrecta; la incertidumbre y la irreversibilidad crean un valor de opción de espera, introduciendo un costo de oportunidad en el proyecto de inversión.

Anexo C - Detalle de países e índices de bolsas de valores tomados en regresión

<u>Nombre del País</u>	<u>Nombre del Índice</u>	<u>Nombre del País</u>	<u>Nombre del Índice</u>
Alemania	DAX Index	Indonesia	JCI Index
Argentina	MERVAL Index	Inglaterra	UKX Index
Australia	AS30 Index	Israel	TA-100 Index
Austria	ATX Index	Italia	MIBTEL Index
Bélgica	BEL20 Index	Japón	NKY Index
Brasil	IBOV Index	Malasia	KLCI Index
Canadá	SPTSX Index	México	MEXBOL Index
Chile	IPSA Index	Noruega	OBX Index
China	SHCOMP Index	Nueva Zelanda	NZSE40 Index
Corea del Sur	KOSPI Index	Pakistán	KSE Index
Dinamarca	KFX Index	Perú	IGBVL Index
Estados Unidos	SPX Index	Portugal	BVLX Index
Egipto	EFGIEFG Index	República Checa	PX50 Index
Eslovaquia	SKSM Index	Rusia	RTSI\$ Index
España	MADX Index	Singapur	STI Index
Filipinas	PCOMP Index	Sri Lanka	CSEALL Index
Francia	CAC Index	Suecia	SBX Index
Grecia	ASE Index	Suiza	SMI Index
Holanda	AEX Index	Tailandia	SET Index
Hong Kong	HSI Index	Turquía	XU100 Index
India	SENSEX Index		

Anexo D - Un modelo de relación entre tasa de crecimiento y valor de un activo

Conforme el cálculo estándar de valor presente neto de los flujos de fondos generados por un activo²³, el valor de un flujo de fondos futuro surge de:

$$V_t = \frac{FF_{t+1}}{(1+k)} + \frac{FF_{t+2}}{(1+k)^2} + \frac{FF_{t+3}}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{FF_{t+i}}{(1+k)^i} \quad (D.1)$$

donde V_t es el valor al momento t , FF_{t+i} es el flujo de fondos generado por el activo en el período $t+i$, y k es la tasa de descuento relevante. Si los flujos de fondos son constantes de la forma $FF_{t+1}=FF_{t+2} = \dots=FF_{t+i}$, se tiene que:

$$V_t = FF_{t+1} * \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+k)^i} = FF_{t+1} * \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \quad (D.2)$$

donde

²³ Ver Hirschleifer (1985), o cualquier libro de texto básico de finanzas corporativas, tal como Brealey y Myers (1996).

$$\lambda=1/(1+k) \tag{D.3}$$

Si se resta de (D.2) el término λV_t se obtiene que:

$$V_t - \lambda V_t = FF_{t+1} \lambda \tag{D.4}$$

de donde el valor V_t será:

$$V_t = \frac{FF_{t+1} \lambda}{1 - \lambda} = \frac{FF_{t+1}}{k} \tag{D.5}$$

Siguiendo el mismo esquema de cálculo, si el flujo de fondos FF_t crece a la tasa constante g , se encuentra que:

$$V_t = FF_{t+1} / (k - g) \tag{D.6}$$

donde k es la tasa de descuento relevante y g es la tasa de crecimiento constante. Esta fórmula surge de

$$V_t = \frac{FF_t * (1+g)}{(1+k)} + \frac{FF_{t+2} * (1+g)^2}{(1+k)^2} + \frac{FF_{t+3} * (1+g)^3}{(1+k)^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{FF_{t+i} * (1+g)^i}{(1+k)^i} \tag{D.7}$$

pero siendo $FF_{t+1} = FF_t (1+g)$, $FF_{t+2} = FF_t (1+g)^2$, $FF_{t+i} = FF_t (1+g)^i$, entonces

$$V_t = FF_t * \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1+g)^i}{(1+k)^i} = FF_{t+1} * \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \tag{D.8}$$

donde ahora $\lambda = (1+g)/(1+k)$, y para asegurar convergencia, $g < k$. Si resta de V_t el siguiente término λV_t , se obtiene que:

$$V_t - \lambda V_t = FF_t \lambda \tag{D.9}$$

de donde el valor será el que se expone en (D.6)

$$V_t = \frac{FF_{t+1} \lambda}{1 - \lambda} = \frac{FF_{t+1}}{k - g} \tag{D.10}$$

El modelo puede ser fácilmente extendido a n etapas de crecimiento atendiendo las diferencias.