

A. LENTIN

Maître de Recherches del C. N. R. S. (Francia)

Y

J. RIVAUD

Doctor en Ciencias

Maître de Conférences de la Escuela Politécnica, París

ALGEBRA MODERNA

Versión española de

EMILIO MOTILVA YLARRI

Licenciado en Ciencias Exactas

Profesor de la Escuela Politécnica del Ejército



AGUILAR

INDICE GENERAL

PREFACIO DE LA EDICIÓN FRANCESA Pág. IX

PARTE I

CONJUNTOS. ESTRUCTURAS FUNDAMENTALES

<p>CAP. I.—CONJUNTOS. APLICACIONES, RELACIONES BINARIAS</p> <p><i>Conjuntos:</i> 1. Noción de conjunto, <i>pág.</i> 3.—2. Subconjuntos, 4.—3. Conjunto producto, 5.—<i>Aplicaciones:</i> 4. Definición, 7.—5. Imagen de una parte de E. Aplicación suprayectiva, 8.—6. Imagen recíproca de una parte de F. Aplicación inyectiva, 8.—7. Aplicación biyectiva, 9.—<i>Relaciones binarias:</i> 8. Clase asociada a una propiedad. Cuantificadores, 11.—9. Relación binaria, 12.—10. Propiedades usuales de las relaciones binarias, 13.—<i>Relaciones de equivalencia:</i> 11. Relación de equivalencia, 15.—12. Clase de equivalencia, conjunto cociente, 16.—<i>Relaciones de orden:</i> 13. Relaciones de orden, 18.—14. Mayorante. Límite superior, 19.—Ejercicios sobre el capítulo I, 20.</p> <p>CAP. II.—LEYES DE COMPOSICIÓN, ESTRUCTURAS, ÁLGEBRA DE BOOLE</p> <p><i>Leyes de composición:</i> 1. Definición, <i>pág.</i> 22.—2. Extensión de una ley de E a $E \times E$, 23.—3. Ley estable respecto de una elemental, 24.—<i>Propiedades usuales de las leyes de composición:</i> 4. Leyes asociativas, 25.—5. Otras propiedades usuales, 27.—<i>Elemento neutro, elemento regular:</i> 6. Algunas propiedades posibles de los elementos, 29.—7. Elementos simétricos, 30.—8. La notación exponencial, 31.—<i>Composición de aplicaciones:</i> 9. Producto de dos aplicaciones, 33.—10. Aplicación de un conjunto en sí mismo, 33.—<i>Nociones de estructura y de isomorfismo:</i> 11. Estructura, 35.—12. Isomorfismo, 36.—13. Imagen homomorfa de un conjunto dotado de una ley, 38.—<i>Álgebra de las partes de un referencial:</i> 14. Una estructura muy general, 40.—15. Álgebra de Boole, 42.—Ejercicios sobre el capítulo II, 43.</p> <p>CAP. III.—ENUMERACIONES DIVERSAS</p> <p><i>Combinatoria:</i> 1. Permutaciones, <i>pág.</i> 45.—2. Variaciones, 45.—3. Combinaciones, 46.—4. Permutaciones con repetición, 47.—5. Variaciones con repetición, 48.—6. Combinaciones con repetición, 48.—<i>Enumeración y álgebra de los conjuntos:</i> 7. Unión de dos conjuntos finitos, 50.—<i>Fórmulas sumatorias.</i> Aplicaciones: 8. Algunas fórmulas sumatorias, 51.—9. Un problema a título de ejemplo, 52.—Ejercicios sobre el capítulo III, 53.</p> <p>CAP. IV.—ESTRUCTURA DE GRUPO</p> <p><i>Los axiomas de la estructura de grupo:</i> 1. Definición, <i>pág.</i> 54.—2. Otras propiedades elementales, 55.—3. Vocabulario y notaciones, 56.—4. Ejemplos de grupos. Grupos finitos, 57.—5. Subgrupos, 59.—<i>Grupos de sustituciones:</i> 6. Definición, 60.—7. Transposición, 62.—8. Paridad de una sustitución, 63.—<i>Estudio de los subgrupos. Automorfismo. Homomorfismo de grupos:</i> 9. Partición estable de un grupo, 65.—10. Subgrupos conjugados. Automorfismos internos, 67.—11. Equivalencia regular, 69.—12. Homomorfismo para los grupos, 70.—13. Grupos monógenos. Grupos cíclicos, 71.—14. Compuesto de dos grupos, 73.—Ejercicios sobre el capítulo IV, 73.</p> <p>CAP. V.—ESTRUCTURA DE ANILLO</p> <p><i>Los axiomas de la estructura de anillo:</i> 1. Definición, <i>pág.</i> 75.—2. Consecuencias de la existencia de un grupo, 76.—3. Otras propiedades, 77.—4. Anillo de integridad, 78.—5. Anillo ordenado, 79.—<i>El anillo Z de los enteros relativos:</i> 6. Introducción, 82.—7. Representación de los enteros por pares, 82.—8. Los enteros relativos, 83.—<i>El anillo de las clases residuales</i></p>	<p>3</p> <p>22</p> <p>45</p> <p>54</p> <p>75</p>
--	--

módulo « n »: 9. Congruencias, 86.—10. Clases residuales módulo n , 88.—11. Correspondencia entre Z y Z/n , 91.—*Relación de divisibilidad en los dominios de integridad*: 12. La relación de divisibilidad, 91.—13. Elementos asociados, 92.—*Homomorfismo de anillos*: 14. Imagen homomorfa de un anillo, 94.—Ejercicios sobre el capítulo V, 96.

CAP. VI.—ESTRUCTURA DE CUERPO 99

Los axiomas de la estructura de cuerpo: 1. Definición, *pág.* 99.—2. Reglas de cálculo, 99.—3. Ejemplos de cuerpos, 101.—4. Característica de un cuerpo. Subcuerpo, 103.—*El cuerpo Q de los números racionales*: 5. Introducción, 104.—6. Definición de números racionales, 105.—7. Operaciones, 105. 8. El cuerpo Q de los números racionales, 106.—9. Cuerpo ordenado, 108. 10. Consecuencias, 109.—11. Convergencia sobre un cuerpo ordenado, 110.—Ejercicios sobre el capítulo VI, 111.

CAP. VII.—ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL 115

Axiomática de un espacio vectorial: 1. Introducción, *pág.* 115.—2. Definición de espacio vectorial, 115.—3. Propiedades elementales, 116.—4. Ejemplos de espacios vectoriales, 116.—5. Producto de espacios vectoriales, 118. 6. Combinaciones lineales, 118.—*Subespacios vectoriales*: 7. Definición, 121. 8. Ejemplos de subespacios, 121.—9. Intersección de subespacios, 122.—10. Suma de dos subespacios, 122.—11. Subespacio engendrado por un sistema de vectores, 123.—12. Subespacios suplementarios; proyecciones, 125. *Dependencia e independencia lineal*: 13. Sistema ligado, 127.—14. Sistema libre, 128.—15. Teorema fundamental de la independencia, 130.—*Espacio vectorial de « n » dimensiones*: 16. Base de un espacio vectorial, 132.—17. Espacio de dimensión finita, 132.—18. Ejemplos, 133.—19. Isomorfismo, 134.—20. Automorfismo. Cambio de base, 135.—21. Dimensión de un subespacio, 137.—22. Intersección y suma de dos subespacios, 138.—*Estudio de un subespacio. Sistemas de ecuaciones lineales*: 23. Estudio de un subespacio de K^n , 139.—24. Determinación de una base, 140.—25. Aplicación a los sistemas lineales, 143.—Ejercicios sobre el capítulo VII, 146.

PARTE II

DOS CUERPOS FUNDAMENTALES

CAP. VIII.—EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES 151

Construcción de los números reales: 1. Consideraciones de orden intuitivo, *pág.* 151.—2. Sucesiones regulares. Sucesiones equivalentes, 152.—3. Propiedades de las sucesiones regulares, 153.—4. Grupo aditivo de R , 154.—5. Grupo multiplicativo de R , 155.—6. El cuerpo de los números reales, 156. *Propiedades fundamentales del cuerpo de los números reales*: 7. R es un cuerpo ordenado, 157.—8. R es un cuerpo arquimediano, 159.—9. R es un cuerpo completo, 160.—10. Principio de los intervalos, 161.—*Una propiedad fundamental de las funciones continuas*: 11. Definición, 163.—12. Teorema, 163.—13. Caso particular, 163.—14. Raíz n -ésima de un número real, 164. Ejercicios sobre el capítulo VIII, 165.

CAP. IX.—ISOMORFISMO FUNDAMENTAL EN EL CUERPO DE LOS NÚMEROS REALES 168

Comparación entre el grupo aditivo de los elementos de R y el grupo multiplicativo de sus elementos positivos: 1. Propiedades del grupo aditivo, *pág.* 168.—2. Propiedades del grupo multiplicativo R_M^+ , 168.—3. El isomorfismo fundamental, 169.—4. Funciones logarítmica y exponencial, 172.—*Extensión del teorema de isomorfismo*: 5. Caso de un grupo abstracto, 174. 6. Consideraciones intuitivas, 175.—7. Propiedades del grupo G , 175.—8. Teorema de isomorfismo, 177.—*Medida de longitudes sobre una recta*: 9. Extensión del teorema de isomorfismo, 178.—10. Propiedades de la recta, 178.—11. La medida de segmentos, 180.—Ejercicios sobre el capítulo IX, 181.

CAP. X.—EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS 184

Construcción del cuerpo C : 1. Definición del producto, *pág.* 184.—2. Propiedades del producto, 185.—3. Estructura de cuerpo, 186.—4. Automorfis-

mo de C : complejos conjugados, 188.—5. Aplicaciones, 191.—*Representación trigonométrica de los números complejos*: 6. Imagen de un número complejo, 193.—7. Módulo y argumento, 194.—8. Aplicación al grupo multiplicativo, 195.—9. El plano de Argand-Cauchy, 198.—10. Raíces n -ésimas de un número complejo, 199.—*Nota sobre los cuaternios*: 11. Definiciones, 202. Ejercicios sobre el capítulo X, 205.

PARTE III

ALGEBRA DE LOS POLINOMIOS

CAP. XI.—POLINOMIOS DE UNA VARIABLE 211

Nociones generales: 1. La noción clásica de polinomio, *pág.* 211.—2. Polinomio formal, 211.—*Espacio vectorial de los polinomios formales sobre un cuerpo*: 3. Adición, 213.—4. Multiplicación por un escalar, 214.—5. Polinomios sobre un cuerpo K , 214.—*Anillo de los polinomios sobre un anillo*: 6. Producto de dos polinomios, 215.—7. Propiedades de la multiplicación, 217. 8. Anillo de los polinomios, 217.—9. Anillo de los polinomios sobre un cuerpo, 218.—10. Principio de especialización, 220.—*Clases de congruencia. División euclidiana*: 11. Clases de congruencia con relación a un polinomio, 222. 12. División euclidiana, 224.—13. Propiedades, 225.—14. División por $x-a$, 226.—15. Polinomios y funciones racionales enteras, 227.—16. División según las potencias crecientes, 229.—*Ideales de polinomios. M. C. D. y M. C. M.*: 17. Noción de ideal, 230.—18. M. C. D. Polinomios primos entre sí, 232.—19. Caso de dos polinomios, 233.—20. Mínimo común múltiplo, 236. *Nociones sobre eliminación*: 21. Polinomios no primos, 237.—Ejercicios sobre el capítulo XI, 240.

CAP. XII.—DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS. FRACCIONES RACIONALES. 242

Factores primos. Teorema fundamental: 1. Polinomio irreducible sobre un cuerpo, *pág.* 242.—2. Teorema fundamental, 243.—3. Descomposición completa, 245.—*Extensión algebraica de un cuerpo*: 4. Anillo de las clases residuales, 246.—5. Extensión algebraica de un cuerpo, 247.—6. Ejemplo 1.º: el cuerpo de los complejos, 247.—7. Clases residuales módulo x^2-2 , 249.—8. Cuerpo de ruptura de un polinomio, 250.—*Descomposición en los cuerpos C y R* : 9. Teorema de D'Alembert, 251.—10. Descomposición en C , 253. 11. Descomposición sobre R , 253.—12. Ejemplo 1.º: ecuación de tercer grado, 254.—13. Ejemplo 2.º: ecuación de cuarto grado, 255.—*Derivada de un polinomio. Raíces múltiples*: 14. Definición algebraica formal de la derivada, 258.—15. Derivadas sucesivas, 259.—16. Fórmula de Taylor, 259. 17. Raíces múltiples, 260.—*El cuerpo de las fracciones racionales*: 18. Cuerpo de las fracciones del anillo $K[x]$, 262.—19. Descomposición en elementos simples, 263.—20. Caso particular importante, 265.—Ejercicios sobre el capítulo XII, 268.

CAP. XIII.—POLINOMIOS DE VARIAS VARIABLES 271

Anillo $K[x, y]$: 1. Polinomios formales, *pág.* 271.—2. Espacio vectorial, 271. 3. Producto, 272.—4. Orden lexicográfico, 273.—*Polinomios simétricos*: 5. Automorfismos definidos por sustituciones sobre las variables, 274.—6. Teorema, 276.—7. Ejemplos, 278.—*Factorización única en $K[x, y]$* : 8. Anillo de factorización única, 280.—9. Caso del anillo $Z[x]$, 281.—10. Generalización, 283.—Ejercicios sobre el capítulo XIII, 284.—Ejercicios de recapitulación (Partes II y III), 286.

PARTE IV

ALGEBRA LINEAL

CAP. XIV.—LAS MATRICES 291

Nociones generales y notaciones: 1. Definición, *pág.* 291.—2. Subdivisión en cajas, 293.—3. Trasposición, 294.—*Espacio vectorial de las matrices de dimensiones dadas*: 4. Adición, 295.—5. Espacio vectorial de las matrices (m, n) , 295.—6. Subespacios vectoriales, 297.—*Rango de una matriz. Aplicación a los sistemas lineales*: 7. Teorema fundamental, 298.—8. Matriz

regular, 301.—9. Sistema lineal. Interpretación vectorial, 301.—10. Condición de posibilidad, 302.—11. La condición de Kronecker, 303.—*Producto de matrices*: 12. Producto de dos matrices, 305.—13. Propiedades del producto, 308.—14. Ejemplos de fórmulas matriciales, 312.—15. Matrices elementales, 314.—16. Operaciones con cajas, 315.—*Anillo de las matrices cuadradas de orden n* : 17. Estructura de anillo, 317.—18. Subanillos, 320.—19. Inversión de una matriz cuadrada, 321.—20. Cambio de base en un espacio vectorial, 323.—21. Cálculo de la inversa, 326.—22. Aplicación al estudio de las matrices rectangulares, 329.—Ejercicios sobre el capítulo XIV, 331.

CAP. XV.—APLICACIONES LINEALES. ESPACIOS DUALES 334

Aplicaciones lineales: 1. Definiciones generales, *pág.* 334.—2. Ejemplos de aplicaciones lineales, 335.—3. Imagen de un sistema, 336.—4. Determinación de una aplicación lineal. Existencia, 337.—5. Imagen de un subespacio. Rango. Aplicación suprayectiva, 337.—6. Imagen recíproca de un subespacio de F . Núcleo, 338.—7. Ecuaciones lineales, 340.—*Composición de aplicaciones lineales*: 8. Espacio vectorial de las aplicaciones de E en F , 341.—9. Compuesta de dos aplicaciones lineales, 342.—*Aplicaciones entre espacios de dimensiones finitas*: 10. El espacio inicial es de n dimensiones, 343.—11. Biyección, 344.—*El espacio de las funciones lineales*: 12. Funciones lineales, 345.—13. Expresión analítica en una base. Existencia, 346.—14. Cambio de base, 347.—15. Operaciones con las funciones lineales, 348.—16. Dimensión del espacio F . Base, 349.—17. Dualidad, 350.—18. Subespacios conjugados 351.—19. Determinación práctica, 352.—*Espacios duales*: 20. Dualidad, 354.—21. Bases duales, 356.—22. Cambios de base, 358.—*Aplicaciones traspuestas*: 23. Traspuesta de una aplicación lineal, 360.—24. Traspuesta de una suma y de un producto, 361.—25. Núcleo y rango de la aplicación traspuesta, 362.

CAP. XVI.—APLICACIONES MULTILINEALES. DETERMINANTES 364

Aplicaciones multilineales: 1. Definición, *pág.* 364.—2. Expresión analítica en una base, 366.—*Aplicaciones antisimétricas*: 3. Transformada de una aplicación por una sustitución, 367.—4. Aplicación antisimétrica, 368.—5. Antisimetrización de una función p veces lineal, 370.—6. Función determinante en un espacio de n dimensiones, 371.—7. Consecuencias, 373.—8. Orientación de un espacio vectorial, 374.—*Determinante de una matriz*: 9. Definición, 375.—10. Determinantes de dos matrices traspuestas, 376.—11. Linealidad y antisimetría, 376.—12. Determinante de un producto de matrices, 378.—13. Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o columna, 380.—14. Aplicaciones, 381.—15. Cálculo de un determinante, 383.—*Aplicación a los sistemas lineales*: 16. Identidades preliminares, 386.—17. Inversión de una matriz, 386.—18. Sistema de Cramer, 388.—19. Ejemplo, 388.—20. Discusión de un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, 389.—*Producto exterior*: 21. Definición, 391.—22. Propiedades, 392.—23. Determinación en una base, 392.—Ejercicios sobre el capítulo XVI, 394.

CAP. XVII.—OPERADORES Y MATRICES 399

Representación matricial de las aplicaciones lineales: 1. Operadores y matrices, *pág.* 399.—2. Ejemplos, 400.—3. Isomorfismo entre matrices y operadores, 403.—*Composición de aplicaciones y producto de matrices*, 403.—5. Trasposición, 404.—*Endomorfismos de un espacio vectorial*: 6. Isomorfismo de anillos, 405.—7. Determinante de un endomorfismo, 406.—8. Grupo lineal, 407.—9. Matrices semejantes, 408.—10. Subespacio invariante, 410.—*Diagonalización de un operador*: 11. Vector propio y valor propio, 411.—12. Obtención de los valores propios y de los vectores propios, 414.—13. Diagonalización: método práctico, 415.—14. Ecuación verificada por un operador diagonalizable, 417.—Ejercicios sobre el capítulo XVII, 421.

CAP. XVIII.—FORMAS BILINEALES Y FORMAS CUADRÁTICAS 425

Aplicaciones bilineales: 1. Forma bilineal, *pág.* 425.—2. Aplicaciones asociadas a una función. Rango, 426.—*Aplicaciones bilineales y simétricas. Formas cuadráticas*: 3. Aplicaciones simétricas, 428.—4. Forma cuadrática asociada, 429.—5. Vectores conjugados, 431.—6. Diagonalización de una forma, 432.—7. Descomposición de una forma cuadrática en cuadrados, 432.—*Formas cuadráticas sobre el cuerpo de los números reales*: 8. Caso del cuerpo R . Ley de Sylvester, 434.—9. Carácter de definición. Desigualdad de Schwartz, 436.—Ejercicios sobre el capítulo XVIII, 438.

CAP. XIX.—ESPACIO EUCLIDIANO. ESPACIO UNITARIO 439

Producto escalar: 1. Definición. Propiedad fundamental, *pág.* 439.—2. Forma fundamental, 440.—3. Ortogonalidad, 442.—4. Longitudes, 443.—5. Ángulos, 443.—*Bases ortonormadas*. *Producto vectorial*: 6. Método de ortogonalización de Schmidt, 445.—7. Suplemento ortogonal, 447.—8. Cambio de base. Matrices ortogonales, 448.—9. Función determinante en un espacio euclidiano. Producto vectorial, 450.—*Operadores lineales*: *Traspuesto, operador ortogonal*: 10. Traspuesto de un operador, 452.—11. Transformación ortogonal. Grupo ortogonal, 454.—*Operadores y formas simétricas*: 12. Operador simétrico, 456.—13. Diagonalización de un operador simétrico, 458.—14. Función bilineal en un espacio euclidiano, 460.—15. Función bilineal y simétrica, 460.—16. Diagonalización simultánea de dos funciones, 461.—*Espacio unitario de «n» dimensiones*: 17. Función hermitica, 464.—18. Espacio unitario: producto escalar, 465.—19. Ortogonalidad. Base ortonormada, 467.—20. Cambio de base. Matriz unitaria, 468.—21. Asociado de un operador lineal. Grupo unitario, 469.—22. Operador hermitico, 470.—Ejercicios de recapitulación, 472.

INDICE ALFABÉTICO DE AUTORES Y MATERIAS 479