

J. RIVAUD
Doctor en Ciencias
Maître de Conférences de la Escuela Politécnica, París

EJERCICIOS
DE
ALGEBRA

Versión española de
EMILIO MOTILVA YLARRI
Licenciado en Ciencias Exactas



TOLLE, LEGE

AGUILAR

INDICE GENERAL

NOTA EDITORIAL	Pág. IX
<p>CAP. I.—CONJUNTOS. COMBINATORIA. LEYES DE COMPOSICIÓN</p> <p><i>Conjuntos. Subconjuntos:</i> 1. Subconjuntos, <i>pág.</i> 3.—2. Relación de equivalencia, 5.—<i>Combinatoria:</i> 3. Nociones generales, 8.—4. Permutaciones, 10. 5. Variaciones, 12.—6. Combinaciones, 13.—7. Combinaciones con repetición, 16.—<i>Leyes de composición:</i> 8. Propiedades usuales, 18.—9. Ley no asociativa, 21.—10. Inverso de un elemento, 23.</p>	3
<p>CAP. II.—GRUPOS. ANILLOS. CUERPOS</p> <p><i>Estructura de grupo:</i> 1. Reglas operatorias, <i>pág.</i> 26.—2. Grupos de transformaciones, 28.—3. Subgrupos, 30.—4. Relaciones de equivalencia asociadas a un subgrupo, 32.—5. Grupos de sustituciones, 33.—6. Razón doble, 35.—<i>Estructura de anillo:</i> 7. Reglas operatorias, 36.—8. Dominio de integridad, 38.—9. Anillo de los enteros relativos. División, 39.—10. Clases residuales módulo n, 41.—11. Otros ejemplos de anillos, 43.—<i>Estructura de cuerpo:</i> 12. Reglas operatorias, 45.—13. Cuerpo ordenado, 47.—14. El cuerpo Q de los números racionales, 49.—15. Descomposición en elementos simples, 51.—16. El cuerpo R de los números reales, 53.</p>	26
<p>CAP. III.—EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS</p> <p><i>Los números complejos en la forma $a+ib$:</i> 1. Reglas operatorias, <i>pág.</i> 56. 2. Complejos conjugados, 58.—3. El número j, 59.—4. Raíces cuadradas de un número complejo. Ecuación de segundo grado, 61.—5. Raíces cúbicas, 63.—<i>Los números complejos en forma trigonométrica:</i> 6. Módulo y argumento, 64.—7. Caso de los complejos conjugados, 66.—8. Lugar geométrico de la imagen de un número variable, 68.—9. Raíces n-ésimas de un número complejo, 71.—10. Aplicación a la ecuación binomia, 72.—11. Módulo y argumento de un producto y de un cociente, 73.—12. Razón doble de cuatro números complejos, 75.—<i>Transformaciones conformes:</i> 13. Nociones generales, 78.—14. La transformación circular, 81.—15. La transformación circular: propiedades fundamentales, 83.—16. Transformaciones diversas, 87.</p>	56
<p>CAP. IV.—ANILLOS DE POLINOMIOS</p> <p><i>Estructura de anillo:</i> 1. Operaciones formales, <i>pág.</i> 90.—2. Raíz cuadrada de un polinomio, 93.—3. Valor de un polinomio, 94.—<i>División de polinomios:</i> 4. Anillo euclidiano, 95.—5. División por $x-a$, 97.—6. Generalización, 101.—7. Divisibilidad. Polinomios primos, 103.—8. División según las potencias crecientes, 104.—9. Polinomios sobre un anillo, 105.—<i>Divisores comunes. Descomposición en factores primos:</i> 10. Divisores comunes a dos polinomios, 106.—11. Teorema de Bezout, 108.—12. Descomposición en factores primos, 111.</p>	90
<p>CAP. V.—POLINOMIOS SOBRE LOS CUERPOS C Y R</p> <p><i>Descomposición en el cuerpo de los números complejos:</i> 1. Teorema de d'Alembert, <i>pág.</i> 116.—<i>Descomposición en el cuerpo de los números reales:</i> 2. Forma general de la descomposición, 118.—3. Polinomio de tercer grado, 119.—4. Polinomio de cuarto grado, 120.—5. Otros casos, 123.—6. Aplicaciones, 124.—<i>Relaciones entre los coeficientes y las raíces:</i> 7. Fórmulas generales, 126.—8. Polinomio de tercer grado, 128.—9. Polinomio de cuarto grado, 129.—10. Aplicaciones diversas, 131.—<i>Descomposición sobre el cuerpo Q de los racionales:</i> 11. Nociones generales, 133.—12. Raíces racionales, 134.—<i>Aplicaciones a la trigonometría y a la geometría:</i> 13. Ecuaciones algebraicas ligadas a la trigonometría, 135.—14. Teorema de Cotes, 139.</p>	116
<p>CAP. VI.—DERIVACIÓN FORMAL. RAÍCES MÚLTIPLES. ELIMINACIÓN. TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES</p> <p><i>Derivación formal. Fórmula de Taylor:</i> 1. Derivación formal, <i>pág.</i> 141.—2. Fórmula de Taylor, 144.—3. Raíces múltiples, 145.—<i>Eliminación:</i> 4. Mé-</p>	141

- todo práctico, 149.—5. Aplicación a las raíces múltiples, 150.—*Transformación de ecuaciones*: 6. Transformada en $y=F(x)$, 152.—7. Transformación $y=x+h$, 152.—8. Transformación homográfica, 154.—9. Transformación cuadrática, 156.—10. Transformaciones que se reducen al caso anterior, 156.—11. Reducción del grado de una ecuación, 157.
- CAP. VII.—FRACCIONES RACIONALES** 162
El cuerpo de las fracciones racionales: 1. Estructura de cuerpo, *pág.* 162. 2. Derivación formal, 163.—*Descomposición en fracciones simples*: 3. Fórmula general, 164.—4. Caso de una potencia, 167.—5. Descomposición sobre el cuerpo de los números reales, 170.—6. Descomposición sobre el cuerpo de los números complejos, 173.—*Aplicaciones*: 7. Ejercicios diversos, 175.
- CAP. VIII.—POLINOMIOS DE VARIAS VARIABLES** 179
Anillo de los polinomios de varias variables: 1. Estructura de anillo, *pág.* 179. 2. División, 182.—*Polinomios simétricos*: 3. Definición, 185.—4. Polinomios simétricos y homogéneos, 186.—5. Polinomios simétricos fundamentales, 187.—6. Otros ejemplos, 190.—7. Polinomios antisimétricos, 192.—*Fracciones simétricas. Aplicaciones de los polinomios simétricos*: 8. Fracciones simétricas, 194.—9. Funciones simétricas de las raíces de una ecuación, 196. 10. Sistemas simétricos, 197.—11. Aplicación a la eliminación, 198.—*Derivadas parciales*: 12. Derivación formal, 199.
- CAP. IX.—EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE REVISIÓN** 203
Conjuntos. Leyes de composición. Estructuras: 1. Conjuntos. Combinatoria, *pág.* 203.—2. Grupos, 204.—3. Leyes de composición, 205.—4. Cuerpo de los racionales y cuerpo de los números reales, 205.—*Cuerpo de los complejos*: 5. Representación geométrica. Complejos conjugados, 207.—6. Transformaciones diversas, 209.—*Álgebra de los polinomios*: 7. Polinomios sobre R o C , 211.—8. Derivación. Eliminación. Raíces múltiples, 212.—9. Polinomios de varias variables, 214.
- CAP. X.—ESPACIOS VECTORIALES** 216
Estructura de espacio vectorial: 1. Reglas operatorias, *pág.* 216.—2. Vectores de orden n sobre un cuerpo, 217.—3. Otros ejemplos, 219.—*Subespacios vectoriales. Generadores*: 4. Ejemplos de subespacios, 221.—5. Generadores. Transformaciones elementales, 223.—*Dependencia e independencia lineal*: 6. Definición, 225.—7. Criterio de independencia, 227.—8. Conjuntos de funciones, 227.—9. Rango de un sistema de matrices, 229.—*Espacio de n dimensiones*: 10. Dimensión y base de un espacio vectorial, 230.—11. Determinación de una base, 230.—12. Rango y dimensión, 233.—13. Base incompleta, 234.—14. Espacio de los polinomios, 235.—15. Formas lineales, 236. 16. Estudio de un espacio vectorial ligado a las sucesiones recurrentes, 238.—*Espacio dual de un espacio vectorial. Sistemas de ecuaciones lineales*: 17. Función lineal, 240.—18. Espacio de las funciones lineales. Dualidad, 241.—19. Sistema lineal y homogéneo, 243.—20. Ecuaciones de un subespacio, 245.—21. Sistemas no homogéneos, 246.
- CAP. XI.—CÁLCULO MATRICIAL** 248
Espacio vectorial de las matrices de dimensiones dadas: 1. Adición y multiplicación por un escalar, *pág.* 248.—2. Subespacios vectoriales, 249.—3. Trasposición, 251.—*Rango de una matriz*: 4. Determinación del rango, 252. 5. Matriz regular, 255.—*Producto de matrices*: 6. Producto de dos matrices, 256.—7. Traspuesta de un producto, 259.—8. Caso particular: matrices cuadradas de segundo orden, 261.—9. Matrices cuadradas de tercer orden, 264.—10. Matrices cuadradas de orden n , 265.—11. Filas y columnas del producto, 267.—12. Casos particulares importantes, 271.—*Anillo de las matrices cuadradas*: 13. Estructura de anillo, 272.—14. Potencia de una suma, 275.—15. Subanillos, 277.—*Inversión de una matriz cuadrada*: 16. Matriz invertible o regular, 281.—17. Cálculo de la inversa, 283.—18. Caso de una matriz de orden n , 286.—19. Matrices triangulares, simétricas y en damero, 287.—20. Aplicación al rango de una matriz, 289.—*Nociones sobre las series de matrices*: 21. Matriz función de una variable, 290.—22. Serie exponencial, 292.—23. Serie geométrica, 296.
- CAP. XII.—DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA. SISTEMAS LINEALES.** 298
Función multilineal y alternada de las filas de una matriz: 1. Definición axiomática de un determinante, *pág.* 298.—2. Expresión general de un determinante, 300.—3. Determinantes asociados a dos matrices traspuestas.

Aplicaciones, 303.—*Cálculo de un determinante*: 4. Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila, 306.—5. Caso particular, 308.—6. Empleo de las operaciones elementales, 308.—7. Otros casos, 311.—8. Relaciones de recurrencia, 312.—9. Aplicación de las propiedades de los polinomios, 314.—10. Polinomios antisimétricos, 315.—*Determinante de un producto de matrices*: 11. Regla para multiplicar, 316.—12. Combinaciones de filas o de columnas, 318.—13. Aplicación, 319.—*Aplicación de los determinantes a los sistemas lineales*: 14. Sistema de Cramer, 321.—15. Sistemas singulares, 322.—16. Inversión de una matriz, 326.

CAP. XIII.—OPERADORES LINEALES. ENDOMORFISMOS 327

Aplicación lineal de E en F: 1. Matriz de un operador, *pág.* 327.—2. Imagen de un subespacio. Rango de un operador, 329.—3. Imagen recíproca de un subespacio. Núcleo, 331.—4. Composición de aplicaciones lineales, 332.—5. Cambios de base, 334.—*Endomorfismos de un espacio vectorial*: 6. Consideraciones generales, 336.—7. Endomorfismos. Primeros ejemplos, 337. 8. Proyector, 339.—9. Imagen y núcleo, 340.—10. Subespacio invariante, 344. 11. Cambio de base. Operador regular, 349.—*Anillo de los endomorfismos*: 12. Producto de dos endomorfismos, 352.—13. Transformación en el espacio de los polinomios, 355.—14. Subespacio engendrado por un vector, 356.—15. Operador idempotente y proyector, 359.—16. Operador nilpotente, 362. 17. Subanillo asociado a un operador, 364.—18. Ecuación a la que satisface un operador, 367.

CAP. XIV.—OPERADORES EN EL GRUPO LINEAL: REDUCIDA DIAGONAL, REDUCIDA TRIANGULAR. APLICACIONES 370

Valores propios y subespacios propios de un operador: 1. Polinomio característico, *pág.* 370.—2. Cálculo de los coeficientes, 376.—Subespacios propios, 377.—*Diagonalización de un operador*: 4. Caso de valores propios distintos, 382.—5. Condiciones necesarias y suficientes de diagonalización, 386. *Aplicaciones de la diagonalización*: 6. Potencias de una matriz, 389.—7. Sucesiones recurrentes lineales, 391.—8. Transformaciones circulares y matrices, 393.—9. Operadores permutables, 395.—*Descomposición espectral*. *Aplicaciones*: 10. Descomposición espectral de un operador diagonalizable, 397.—11. Descomposición espectral de una matriz, 399.—12. Series de matrices o de operadores, 401.—13. Aplicación a los sistemas diferenciales, 404.—*Reducida triangular. Operador no diagonalizable*: 14. Reducida triangular, 408.—15. Operador no diagonalizable, 412.

CAP. XV.—ESPACIO EUCLIDIANO DE n DIMENSIONES 414

Función bilineal. Forma cuadrática: 1. Función bilineal, *pág.* 414.—2. Función simétrica, 417.—3. Forma cuadrática, 422.—4. Descomposición en cuadrados, 425.—*Espacio euclidiano*: 5. Producto escalar. Ortogonalización, 428. 6. Longitudes y ángulos, 431.—7. Subespacios ortogonales y suplementarios, 435.—8. Cambio de base. Matriz ortogonal, 437.—*Operadores lineales en un espacio euclidiano*: 9. Proyección ortogonal; simetría, 441.—10. Traspuerto de un operador, 443.—11. Transformaciones ortogonales, 445.—12. Operador simétrico, 450.—13. Función bilineal y simétrica, 453.—14. Operador antisimétrico, 456.—15. Operadores cualesquiera de un espacio euclidiano, 457.—16. Descomposición polar de un operador, 459.—*Espacio unitario de n dimensiones*: 17. Producto escalar, 465.—18. Grupo unitario. Operador hermítico, 467.

NOTA.—RESOLUCIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS SISTEMAS LINEALES 470

1. Sistema lineal y homogéneo, *pág.* 470.—2. Resolución, 471.—3. Ecuaciones de un subespacio, 472.—4. Sistemas no homogéneos, 473.