

RUBEN A. VERONESI

Profesor Titular (dedicación exclusiva) de
Algebra Moderna y Matemática para Economistas
de la Facultad de Ciencias Económicas
de la Universidad Nacional de La Plata

**introducción al
ALGEBRA
MODERNA**

EDICIONES LIBRERIA JURIDICA
LA PLATA

INTRODUCCION AL ALGEBRA MODERNA

CONTENIDO

indice

| I. | INTRODUCCION LOGICA ELEMENTAL | PAG. |
|--------|---|------|
| 1. | Introducción al cálculo proposicional y funcional | 7 |
| 1.1. | Proposiciones y Valores de verdad | 7 |
| 1.2. | Operaciones con proposiciones. (Conectivos lógicos) | 8 |
| 1.3. | Tablas de verdad | 10 |
| 1.4. | Relaciones lógicas: la implicación | 13 |
| 1.4.1. | Implicaciones asociadas | 14 |
| 1.5. | Razonamientos deductivos. Inferencia lógica | 15 |
| 1.5.1. | El razonamiento silogístico | 15 |
| 1.5.2. | Reglas de inferencia | 16 |
| 1.6. | La función proposicional | 17 |
| 1.6.1. | La función proposicional de varias variables | 18 |
| 1.7. | Cuantificadores lógicos | 19 |
| | RESUMEN DE SIMBOLOS | 20 |
| 2. | Métodos y razonamientos matemáticos | 21 |
| 2.1. | La proposición matemática | 21 |
| 2.2. | El método axiomático | 22 |
| 2.3. | Razonamientos y demostraciones matemáticas | 23 |
| 2.3.1. | Teoremas | 24 |
| 2.3.2. | Métodos de demostración | 26 |
| 2.3.3. | Las demostraciones por rrecurrencia | 28 |
| 2.3.4. | Otros tipos de razonamientos matemáticos | 29 |
| | EJERCICIOS 1 y 2 (CAP. I) | 31 |
| II. | CONJUNTOS. RELACIONES. FUNCIONES. | |
| 3. | Conjuntos | 35 |
| 3.1. | Generalidades. Notaciones. | 35 |
| 3.2. | Inclusión. Subconjuntos. Igualdad. | 37 |
| 3.3. | El conjunto vacío. El conjunto de partes | 39 |
| 3.3.1. | El conjunto vacío | 39 |
| 3.3.2. | El conjunto de partes | 40 |
| 4. | Operaciones entre conjuntos | 41 |
| 4.1. | Unión | 41 |
| 4.2. | Intersección | 41 |
| 4.3. | Diferencia | 42 |
| 4.4. | Complemento | 42 |
| 4.5. | Diferencia simétrica | 44 |
| 4.6. | Propiedades de las operaciones. | 45 |
| 4.7. | ×Leyes de DE MORGAN | 46 |
| 4.8. | Producto cartesiano | 47 |
| 4.8.1. | ×Par ordenado | 47 |
| 4.8.2. | ×Producto cartesiano | 48 |

INTRODUCCION AL ALGEBRA MODERNA

| | | |
|-------------|---|-----|
| 5. | Relaciones | 49 |
| 5.1. | Gráficas | 49 |
| 5.2. | Correspondencia o relación. | 51 |
| 5.3. | Propiedades de las relaciones | 56 |
| 5.4. | Relación de equivalencia | 56 |
| 5.4.1. | Clases de equivalencia | 57 |
| 5.5. | Relaciones de orden | 59 |
| 5.5.1. | Conjunto ordenado | 59 |
| 5.5.2. | Elementos máximos y mínimos. Cotas | 61 |
| 5.5.3. | Conjunto bien ordenado | 61 |
| 6. | Funciones (o aplicaciones) | 62 |
| 6.1. | Gráfica funcional | 62 |
| 6.2. | Función (o aplicación) | 62 |
| 6.3. | Composición de funciones | 64 |
| 6.4. | Funciones inyectivas. Sobreyectivas. Biyectivas | 66 |
| 6.5. | Función inversa | 67 |
| 6.6. | Funciones numéricas | 69 |
| | NOTAS SOBRE ALGEBRA DE BOOLE | 71 |
| | EJERCICIOS 3, 4, 5 y 6 (CAP. II) | 72 |
| III. | CONJUNTOS NUMERICOS | |
| 7. | El número natural | 79 |
| 7.1. | Axiomas de Peano | 80 |
| 7.2. | Operaciones en \mathbb{N} | 81 |
| 7.3. | Orden en \mathbb{N} | 82 |
| 7.4. | Principio de inducción completa (P.I.C.) | 83 |
| 8. | El número entero | 85 |
| 8.1. | Introducción elemental | 85 |
| 8.2. | Clases de equivalencia \mathbb{Z} | 86 |
| 8.3. | Operaciones en \mathbb{Z} | 87 |
| 8.3.1. | Enteros positivos y negativos | 87 |
| 8.3.2. | Propiedades de las operaciones. | 89 |
| 8.3.3. | Valor absoluto | 90 |
| 8.4. | Divisibilidad numérica | 90 |
| 8.5. | Congruencias | 92 |
| 9. | El número racional | 93 |
| 9.1. | Introducción al número racional | 93 |
| 9.1.1. | Clases de equivalencia \mathbb{Q} | 95 |
| 9.2. | Operaciones en \mathbb{Q} | 95 |
| 9.2.1. | Suma y multiplicación | 96 |
| 9.2.2. | Resta y división | 97 |
| 9.3. | Propiedades de \mathbb{Q} | 97 |
| 9.3.1. | Relaciones de orden | 97 |
| 9.3.2. | Densidad y propiedad Arquimediana | 98 |
| 10. | El número real | 99 |
| 10.1. | Generalidades | 99 |
| 10.2. | Método de CANTOR-ARZELA | 100 |
| 10.2.1. | Sucesiones numéricas | 100 |
| 10.2.2. | Encaje de intervalos | 102 |
| 10.2.3. | Representación geométrica | 104 |

INDICE

| | | |
|------------|---|-----|
| 10.3. | Propiedades de los números reales | 105 |
| 10.3.1. | Resumen | 106 |
| 10.3.2. | Propiedad de completitud | 107 |
| 11. | El número complejo. | 108 |
| 11.1. | Definición y operaciones | 109 |
| 11.2. | Representación gráfica. Sistemas de coordenadas | 111 |
| 11.2.1. | Sistema de coordenadas cartesianas | 111 |
| 11.2.2. | Sistema polar | 112 |
| 11.3. | Forma polar de un complejo | 115 |
| 11.4. | Operaciones con complejos en forma polar | 117 |
| | EJERCICIOS 7, 8, 9, 10 y 11 (CAP. III) | 121 |
| | | |
| IV. | COMBINATORIA | |
| 12. | Coordinabilidad | 135 |
| 12.1. | El número cardinal | 135 |
| 12.2. | Conjuntos finitos - infinitos | 136 |
| 13. | Combinatoria simple | 138 |
| 13.1. | Variaciones | 138 |
| 13.1.1. | Cálculo del número de variaciones. | 139 |
| 13.2. | Permutaciones | 140 |
| 13.3. | Combinaciones | 142 |
| 13.4. | Generalización de los números combinatorios | 145 |
| 14. | Combinatoria con repetición | 145 |
| 14.1. | Variaciones con repetición | 145 |
| 14.2. | Permutaciones con elementos indistinguibles | 147 |
| 14.3. | Combinaciones con elementos indistinguibles | 148 |
| 15. | Aplicaciones de la combinatoria | 149 |
| 15.1. | Binomio de NEWTON | 149 |
| 15.2. | Fórmula de LEIBNIZ | 151 |
| 15.3. | Muestreo | 152 |
| 15.4. | Técnica de conteo | 153 |
| | EJERCICIOS 12, 13 y 14 (CAP. IV) | 154 |
| | | |
| V. | ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. MORFISMOS | |
| 16. | Grupo. Anillo. Cuerpo | 158 |
| 16.1. | Leyes de composición | 158 |
| 16.1.1. | Propiedades | 159 |
| 16.2. | Generalidades | 160 |
| 16.3. | Estructura de grupo | 160 |
| 16.4. | Estructura de anillo | 162 |
| 16.4.1. | Anillo de integridad | 163 |
| 16.5. | Estructura de cuerpo | 164 |
| 16.5.1. | Cuerpo \mathbb{R} de los reales | 165 |
| 17. | Módulos y espacios vectoriales | 166 |
| 17.1. | Definiciones | 166 |
| 17.2. | Espacio vectorial real | 167 |
| 17.3. | Combinación lineal. Subespacios | 169 |
| 17.3.1. | Subespacio vectorial | 170 |
| 17.4. | Dependencias. Independencia lineal | 172 |

INTRODUCCION AL ALGEBRA MODERNA

| | | |
|---------------|--|-----|
| 17.5. | Base | 177 |
| 17.6. | Representación gráfica | 179 |
| 17.7. | Cambio de base | 181 |
| 18. | Morfismos | 184 |
| 18.1. | Definiciones | 184 |
| 18.2. | Ejemplos | 185 |
| | EJERCICIOS 16 y 17 (CAP. V) | 187 |
| VI. | POLINOMIOS | |
| 19. | Nociones generales | 191 |
| 20. | Igualdad y operaciones | 192 |
| 20.1. | Divisibilidad en $\mathbb{R}[x]$ | 197 |
| 20.2. | Descomposición de polinomios | 199 |
| 21. | División entera | 200 |
| 21.0. | División por $(x - a)$ | 201 |
| 21.1. | Ideales de polinomios M.C.D. y M.C.M. | 203 |
| 21.1.1. | Máximo Común Divisor M.C.D. | 203 |
| 21.1.2. | Mínimo Común Múltiplo M.C.M. | 205 |
| 22. | Factorización de polinomios | 206 |
| 23. | La función polinómica | 210 |
| | APENDICE DEL CAP. VI | 213 |
| | EJERCICIOS 19, 20, 21 y 22 (CAP. VI) | 223 |
| X VII. | APLICACIONES LINEALES | |
| 24. | Definiciones. Propiedades | 226 |
| 24.1. | Propiedades y operaciones. | 229 |
| 25. | Matriz asociada a una transformación | 231 |
| 25.1. | Matriz referida a bases cualesquiera | 235 |
| 25.2. | Matriz asociada a la suma de aplicaciones lineales | 238 |
| 25.3. | Matriz asociada al producto de aplicaciones lineales | 240 |
| | EJERCICIOS 24 y 25 (CAP. VII) | 245 |
| VIII. | MATRICES | |
| 26. | Igualdad. Operaciones. | 249 |
| 26.1. | Transposición | 252 |
| 26.2. | Vectores fila y vectores columna. Producto escalar | 253 |
| 26.3. | Producto de matrices | 253 |
| 26.4. | Partición de matrices | 255 |
| 27. | Matrices cuadradas | 257 |
| 27.1. | Matrices (cuadradas) con elementos complejos | 261 |
| | EJERCICIOS 26 y 27 (CAP. VIII) | 263 |
| IX. | FUNCIONALES LINEALES. DUALIDAD | |
| 28. | Definiciones. Generalidades | 267 |
| 28.1. | Función lineal | 267 |
| 28.2. | Operaciones con funcionales | 269 |
| 29. | Espacio dual | 270 |
| 29.1. | Base dual | 270 |

INDICE

| | | |
|-------------|---|-----|
| 29.2. | Producto escalar | 271 |
| | APLICACIONES ECONOMICAS | 274 |
| | EJERCICIOS 28 y 29 (CAP. IX) | 276 |
| X. | FUNCIONALES MULTILINEALES. EL DETERMINANTE | |
| 30. | Aplicaciones bilineales. Formas bilineales | 278 |
| 30.1. | Definiciones | 278 |
| 30.2. | Formas (o funcionales) alternadas | 280 |
| 30.3. | Formas cuadráticas | 283 |
| 31. | Aplicaciones multilineales | 284 |
| 31.1. | Definiciones | 285 |
| 31.2. | Paridad de una permutación | 286 |
| 31.3. | Formas (multilineales) antisimétricas | 288 |
| 32. | El determinante | 288 |
| 32.1. | Propiedades del determinante | 292 |
| 32.2. | Desarrollo de un determinante | 298 |
| 32.3. | Desarrollo de LAPLACE | 304 |
| 33. | Matriz inversa | 309 |
| 33.1. | Definiciones | 309 |
| 33.2. | Cálculo. Propiedades | 311 |
| 33.3. | Producto de determinantes | 315 |
| | EJERCICIOS 30, 31, 32, y 33 (CAP. X) | 317 |
| XI. | RANGO. OPERACIONES ELEMENTALES | |
| 34. | Rango | 324 |
| 35. | Operaciones elementales | 328 |
| 36. | Uso de las operaciones elementales | 334 |
| 36.1. | Cálculo del rango | 334 |
| 36.2. | Cálculo de la matriz inversa (GAUSS - JORDAN) | 335 |
| 36.3. | Cálculo de determinantes | 338 |
| | EJERCICIOS 34, 35 y 36 (CAP. XI) | 341 |
| XII. | SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES | |
| 37. | La ecuación lineal | 343 |
| 37.1. | Definiciones | 343 |
| 37.2. | Sistemas de ecuaciones | 344 |
| 37.3. | Resolución por operaciones elementales | 346 |
| 37.3.1. | Resumen de sistemas homogéneos | 358 |
| 38. | Teorema de REUCHE - FROBENIUS | 362 |
| | RESUMEN | 364 |
| 39. | Teorema de CRAMER | 366 |
| | APLICACIONES ECONOMICAS | 368 |
| 40. | Inecuaciones - Conjuntos - Convexos | 370 |
| 40.1. | Sistemas de inecuaciones | 371 |
| 40.2. | Conjuntos convexos | 373 |
| 40.3. | Conjuntos en R^n | 374 |
| | APLICACION: LA PROGRAMACION LINEAL | 376 |
| | EJERCICIOS 37, 38, 39, 40 - (CAP. XII) | 380 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| XIII | OPERADORES AUTOVAL. Y AUTOVEC. | |
| 41. | Operadores lineales | 385 |
| 41.1. | Cambio de base | 387 |
| 41.2. | Matrices semejantes | 392 |
| 41.3. | Matrices ortogonales | 394 |
| 42. | Autovalores y Autovectores | 401 |
| 42.1. | Definiciones | 401 |
| 42.2. | Obtención de los autoval. y autovec. | 402 |
| | EJERCICIOS 41, 42 (CAP. XIII) | 412 |
| XIV | MATRICES EQUIVALENTES | |
| 43. | Matrices equivalentes | 414 |
| 44. | Coñgruencia | 416 |
| 44.1. | Coñgruencia y formas cuadráticas | 417 |
| | EJERCICIOS 43 - 44 (CAP. XIV) | 419 |
| XV | ESPACIO EUCLIDIANO - ESPACIO UNITARIO | |
| 45. | Espacio Euclídiano | 421 |
| 45.1. | Definiciones. Propiedades | 421 |
| 45.2. | Operador Transpuesto | 426 |
| 45.3. | Transformación ortogonal | 428 |
| 46. | Espacio Unitario | 430 |
| 46.1. | Generalidades | 430 |
| 46.2. | Formas hermíticas | 432 |
| 46.3. | Operador asociado | 435 |
| 46.4. | Transformación unitaria | 436 |
| | MATRICES RESUMEN DE RESULTADOS | 439 |
| | APENDICE | |
| A-1 | Nociones de Trigonometría | 441 |
| A-2 | Numeración Binaria | 460 |
| | Símbolos y notaciones mas usadas | 466 |
| | BIBLIOGRAFIA | 470 |
| | INDICE | 471 |