

FAUSTO I. TORANZOS

FORMACIÓN  
MATEMÁTICA  
DEL ECONOMISTA

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA  
MÉXICO - BUENOS AIRES

## INDICE GENERAL

	Pág.
<i>Prólogo</i> .....	4
I. <i>Recordando conceptos de Aritmética</i> .....	9
<p>Número natural, 9; Noción sobre numeración binaria, 10; Principio de inducción completa, 13; Ampliación del concepto de número. El número entero, 15; Número racional, 16; Número real, 17; Proceso de los encajes de Cantor, 17; Números reales y puntos de la recta, 18; Operaciones con números irracionales, 20; Medida de aproximación de las operaciones, 22; Error relativo, 23; Números imaginarios, 24; Interpretación geométrica de <math>i</math>, 25; Números complejos, 25; Definición de igualdad, 26; Complejos conjugados, 27; Módulo, 28; División, 28; Representación geométrica de la suma, 29; Teorema final de la Aritmética, 30; Problemas, 30.</p>	
II. <i>Recordando operaciones de Álgebra</i> .....	32
<p>Conceptos, 32; Uso de paréntesis, 32; Regla de los signos, 33; Operaciones con potencias de igual base, 33; Producto de monomios y polinomios, 35; División de polinomios, 35; Teorema del resto y regla de Ruffini, 36; Factorreo, 37; Fracciones algebraicas, 38; Problemas, 38.</p>	
III. <i>Nociones de Trigonometría</i> .....	42
<p>Sobre medidas de ángulos, 42; Definición de las funciones trigonométricas, 43; Resolución de triángulos rectángulos, 44; Relaciones fundamentales, 45; Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables, 47; Ampliación de las definiciones, 49; Fórmulas de adición y sustracción de arcos, 53; Fórmulas de arcos dobles, 54; Fórmulas de arco mitad, 55; Fórmula trigonométrica de un complejo, 56; Operaciones con complejos en forma trigonométrica, 56; <i>Triángulos oblicuángulos</i>: Teorema del seno, 59; Teorema del cosenc, 60; Teorema de las tangentes, 60; Cálculo de un ángulo cuando se conocen tres lados, 60; Cálculo del área, 61; Problemas, 62.</p>	

- IV. *Combinatoria, progresiones, logaritmos y aplicaciones financieras*. Cálculo combinatorio ..... 63  
 Notación, 63; Operaciones combinatorias sin repetición, 63; Variaciones o arreglos sin repetición, 64; Permutaciones sin repetición, 65; Combinaciones, 65; Variaciones con repetición, 66; Permutaciones con repetición, 66; Propiedad de los números combinatorios, 67; Triángulo de Tartaglia, 68; Binomio de Newton, 69; Cuadrado de polinomios, 71; *Progresiones*, Progresiones aritméticas, 72; Progresiones geométricas, 73; *Logaritmos*, Definición, 76; Logaritmos Decimales, 76; Operaciones con logaritmos, 78; Cambio de base, 79; Tablas de logaritmos, 80; Interpolación, 81.  
*Nociones de álgebra financiera*: Intereses, 82; Interés simple, 83; Interés compuesto, 83; Tiempos fraccionarios, 83 descuento. Descuento simple racional, 85; Descuento comercial, 85; Descuento compuesto, 86; Anualidades, 86; Amortizaciones, 87; Problemas, 88.
- V. *Funciones en Economía* ..... 93  
 Generalidades sobre funciones, 93; Gráfico de una función, 94; Clasificación de funciones, 95; Simetría, 95; Ejemplos de funciones en Economía, 96; Funciones de mercado, 96; Ejemplos de curvas demanda-precio, 97; Ejemplos de curvas demanda-ingreso, 98; Funciones de Costos, 98; Funciones de Ingreso, 99; Funciones de Beneficio, 99; Curvas de Indiferencia, 100; Curvas isocuan-tas, 100; Problemas, 101.
- VI. *Álgebra y geometría lineal bidimensional* ..... 102  
 Sistemas lineales con dos incógnitas, 102; noticias sobre matrices y determinantes, 103;  
*Geometría analítica lineal plana*: Coordenadas en el plano, 106; Lugar geométrico, 107; Ecuación de la línea recta por el origen, 108; Ecuación explícita de la recta, 109; Ecuación implícita de la recta, 109; Ecuación segmentaria de la recta, 110; Recta determinada por dos puntos, 110; Ecuación paramétrica de la recta, 111; Vectores en el plano, 112; Operaciones con vectores, 113; Producto escalar de dos vectores, 114; Angulo de dos vectores, 115; Paralelismo, 115; Perpendicularidad, 115; Ecuación de la recta, 116; Angulo de dos rectas, 116; Paralelismo y perpendicularidad, 117; Solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, 117; Inecuaciones lineales, 118;

*Aplicaciones económicas:* La recta en Economía, 120; Ejemplos, 124; Movimientos en el plano, 126; Rotación, 127; Coordenadas polares, 128; Problemas, 129.

VII. *Ecuaciones de segundo grado, cónicas y otras funciones útiles en Economía*..... 131

Ecuaciones de segundo grado, 131; Parábola, 134; Parábola general de eje vertical, 136; Hipérbola, 139; Hipérbola referida a sus asíntotas, 141; Traslación de ejes en la hipérbola equilátera, 143; Función homográfica, 143; Elipse, 146; Circunsferencia, 149.

*Construcción geométrica de cónicas:* Parábola, 150; Hipérbola, 151; Elipse, 152.

*Consideraciones generales sobre las cónicas, 153; Aplicaciones económicas de la ecuación de 2º grado, 154; La parábola en la Economía, 156; Aplicaciones económicas de la hipérbola, 159; Inecuaciones cuadráticas, 160.*

*Funciones trascendentes:* Funciones: Exponencial y Logarítmica, 162; Propiedades de la función exponencial, 162; Propiedades de la función logarítmica, 163; Funciones circulares, 163.

*Ejemplos del uso de funciones trascendentes en economía, 168; Problemas, 168.*

VIII. *Límites, continuidad* ..... 170

Conceptos sobre sucesiones, 170; Definición, 170; Acotación de sucesiones, 171; Monotonía, 172; Límite de una sucesión, 173; Divergencia, 176.

*Límite de funciones:* Conceptos, 177; Condición de existencia del límite, 177; Infinitésimos, 179; Propiedades de los infinitésimos, 180; Comparación de infinitésimos, 181; Nuevas expresiones para el concepto de límite, 182; Propiedades de los límites, 183; Demostraciones, 183; Límites infinitos, 184; Límites laterales, 184; Cálculos de límites, 185.

*Continuidad:* Concepto, 187; Continuidad lateral, 187; Continuidad en un intervalo, 188; Discontinuidad, 188; Propiedades de las funciones continuas, 190; Continuidad de Economía, 191; Problemas, 192.

IX. <i>Derivación</i> .....	194
Conceptos, 194; Función derivada, 195; Interpretación geométrica de la derivada, 196; Ecuación de la tangente a la curva, 197; Ecuación de la normal a la curva, 198; Diferencial y su interpretación geométrica, 199; Diferenciación, 200; Continuidad y derivabilidad, 201; Propiedades de la derivada, 202; Técnica de la derivación, 204; Función de función, 207; Aplicaciones de la derivada del logaritmo natural, 207; Tabla de derivadas, 208; Aplicaciones de la tabla, 210; Derivadas sucesivas, 211; <i>Ejemplos de aplicaciones económicas</i> , 214; <i>Elasticidad</i> Concepto, 216; Cálculo de elasticidades, 219; Elasticidad de la demanda, 221; Ejercicios 223; Problemas, 224.	
X. <i>Integral indefinida</i> .....	228
Conceptos, 228; Propiedades de la integral indefinida, 229; Integración inmediata, 230; Métodos generales de integración, 231; Método de sustitución, 231; Método de integración por partes, 233; Integración de funciones racionales, 234; Integración en Economía, 238; Problemas, 243; Tabla de integrales, 245.	
XI. <i>Integral definida</i> .....	250
Conceptos, 250; Las funciones continuas son integrales, 252; Otras funciones integrables, 252; Propiedades de la integral definida, 253; Demostración del teorema fundamental, 255; Integral generalizada, 256; Límites no acotados, 256; Generalización para funciones no acotadas, 257; Problemas, 258.	
XII. <i>Series</i> .....	260
Conceptos, 260; Serie geométrica, 261; Convergencia absoluta, 263; Serie de términos positivos, 263; Criterio de convergencia absoluta de D'Alembert, 264; Criterio de Cauchy, 266; Criterio de Raabe, 267; Serie de términos alternativamente positivos y negativos, 268; El número e, 269; <i>Series de potencias</i> , 272; Ejercicios propuestos, 274; Ejemplo de aplicación, 275; Problemas, 275.	
XIII. <i>Fórmula de Taylor-Mac Laurin. Estudio de una curva plana</i> .....	276
Teorema de Rolle, 276; Teorema del valor medio, 276; Teorema del valor medio de Cauchy, 278; Fórmula de	

Taylor, 278; Fórmula de Mac Laurin, 281; Series de Taylor y Mac Laurin, 281; Propiedades de las funciones hiperbólicas, 284; Fórmulas de Euler, 285; Límites de expresiones indeterminadas, 286; Generalización de la fórmula de L'Hospital, 287;

*Estudio diferencial de una curva:* Crecimiento, 288; Concavidad, convexidad, y puntos de inflexión, 289; Máximos y mínimos, 290; Asíntotas, 291; Guía para el estudio de una curva plana, 293; Problemas, 294.

XIV. *Serie de Fourier y polinomios ortogonales* ..... 298

Conceptos, 298; Serie de Fourier para valores discretos, 301; Teorema de Dirichlet, 302; Polinomios de Chebychev, 303; Ajuste de una serie mediante los polinomios de Chebychev, 305; Desarrollo en serie de polinomios de Hermite, 308; Problemas, 309.

XV. *Algebra y geometría tridimensional* ..... 310

Determinantes de tercer orden, 310; Propiedades de los determinantes de tercer orden, 311; *Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas*, 314; *Vectores tridimensionales-geometría analítica del espacio:* Coordenadas en el espacio, 317; Vectores del espacio, 318; Operaciones con vectores, 320; Angulo de dos vectores, 323; Paralelismo, 324; Perpendicularidad, 324; Cosenos directores de un vector, 324; Ecuación de la línea recta, 325; Ecuación del plano, 327; Casos particulares de la ecuación del plano, 328; Ecuación segmentaria del plano, 329; Ecuación del plano que pasa por tres puntos, 330; Coplanariedad de vectores, 331; Interpretación geométrica de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, 332; *Aplicaciones a la economía*, 332; *Cuádricas*, 334; Elipsoide, 334; Paraboloides, 336; Hiperboloide, 338; Hiperboloide de dos hojas, 339; Problemas, 340.

XVI. *Cálculo diferencial de funciones de dos variables*..... 342

Función de dos variables, 342; Representación de una función de dos variables, 342; Entorno de un punto, 345; Límite de una función de dos variables, 346; Continuidad en un punto, 348; Derivadas parciales, 348; Funciones derivadas parciales, 349; Interpretación geométrica de la derivada parcial, 349; Incremento y diferencial, 350; Ecuación del plano tangente, 351; Derivadas parciales sucesivas, 352; Derivada de función compuesta, 352;

Fórmula de Taylor para dos variables, 353; Fórmula de Mac Laurin para dos variables, 356; *Clasificación de los puntos de una superficie*, 357; *Máximos y mínimos de una función de dos variables*, 359; Condición necesaria, 360; Condición suficiente, 360; *Extremos vinculados*, 362; Funciones implícitas, 366; Problemas, 367.

XVII. *Integrales múltiples* ..... 369

Integral doble, 369; Teoremas, 371; *Propiedades de la integral*, 372; Ampliación de las características del dominio de integración, 373; Integrales función de un parámetro. Integrales sucesivas, 374; Teorema fundamental, 376; Integrales dobles en coordenadas polares, 378; Cálculo de áreas, 379; Integrales triples, 379; Integrales múltiples, 380; Funciones de Euler, 380; Aplicación al cálculo de la integral de Gauss, 382; Problemas, 387.

XVIII. *Algebra lineal* ..... 388

Espacios ene-dimensionales, 388; *Vectores*, 389; Espacio vectorial, 391; Operaciones con vectores, 391; Producto escalar entre vectores, 393; Combinación lineal de vectores, 394.

*Matrices*: Conceptos y definiciones, 395; Operaciones con matrices, 397; Propiedades del producto de matrices, 400; *Determinantes*: Permutaciones, 401; Determinantes de orden  $n$ , 401; Determinantes principales de una matriz, 402; Matriz adjunta, 403; Propiedades de los determinantes, 403; Método de Chió para calcular un determinante, 408; Matriz inversa, 410; Propiedad del determinante del producto de matrices, 411; *Sistemas de ecuaciones lineales*. Regla de Cramer, 411; Sistemas generales de ecuaciones lineales, 415; Sistema de ecuaciones lineales homogéneas, 416; Inversión de una matriz, 417; Método de Chió-Jordan, 418;

*Transformaciones lineales*. Dependencia o independencia de vectores, 421; Combinación convexa de vectores, 423; Transformaciones lineales, 423; Convexidad, 425; Transformaciones ortogonales, 426; Hiperplanos y semiespacios, 427;

*Semejanza de matrices*: Definición, 433; Vectores propios o característicos de una matriz, 434; *Matrices de Leontief*, 435;. *Ejemplos de aplicaciones del algebra lineal*: Modelo

de Leontief, 436; Ecuaciones de equilibrio estacionario, 437; Modelo abierto de Leontief, 438; Programación, 439; Problemas, 440.

XIX. *Formas cuadráticas y extremos de funciones de n variables* ..... 442

Conceptos, 442; Formas definidas, 443; Condiciones para que una forma cuadrática de dos variables sea definida, 443; Condiciones para que una forma cuadrática de tres variables sea definida, 445; Condiciones para que una forma cuadrática con "n" variables sea definida, 447; Formas cuadráticas condicionadas de dos variables, 449; Formas cuadráticas condicionadas de tres variables, 450; Formas cuadráticas condicionadas de "n" variables, 452; El caso de varias condiciones lineales, 453; *Extremos de funciones de "n" variables*, 453; Condición necesaria de extremo, 454; Condición suficiente, 455; *Extremos condicionados de funciones de "n" variables*, 457; Problemas, 459.

XX. *Ecuaciones diferenciales* ..... 460

Conceptos, 460; Generación de una ecuación diferencial, 461; Clasificación, 462;

*Ecuaciones de primer orden*: Conceptos, 463; Tipos de ecuaciones de primer orden, 464; Variables separables, 465; Diferenciales totales exactas, 465; Factor integrante, 468; Ecuación diferencial homogénea, 469; Reducible a homogénea, 471; Lineal de primer orden, 473; Ecuación de Bernoulli, 474; Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, 475; Ecuación de segundo orden completa, 481; *Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales*, 485; *Ejemplos de aplicaciones económicas*: Modelo macro-económico de Harrod-Domar, 488; Modelos de evolución económica de T. Haavelmo, 489; Modelo de mercado de Evans, 492; Problemas, 493.

XXI. *Operadores y ecuaciones en diferencias*..... 496

Operadores, 496; Operador "E", 496; Propiedades de "E" 497.

*Ecuaciones en diferencias*: Conceptos, 500 Ecuaciones en diferencias, 501; Ecuaciones lineales en diferencias, 501; Ecuación en diferencias lineal de primer orden, 502; Ecuación en diferencias, lineal de segundo orden, 503; Ecuación en diferencia lineal de orden n, 507; Raíces múltiples, 508; *Sistemas de ecuaciones lineales en diferencias*, 508.

*Aplicaciones económicas:* Modelo de Harrod-Domar en diferencias, 509; Modelo de Mahalanobis, 513; Modelo de la telaraña, (cobweb model), 514; Modelo de Samuelson, 515; Problemas, 516.

*Apéndices:*

I. Breve introducción a la Lógica Matemática .....	517
II. Teoría de Conjuntos - Algebra de Boole .....	524
III. Conceptos topológicos en " $R^n$ " .....	533
IV. Breves nociones sobre Algebra Abstracta .....	537
Solución de Problemas .....	545